Vindmøller og helikoptere – breddeopgave 42 og 43 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaverne fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaverne i sidste nummer af KVANT var disse breddeopgaver fra RUC (nr. 42 og 43 i rækken her i KVANT):

Breddeopgaver 42 og 43. Vindmøller og helikoptere

42. Giv en øvre grænse for effekten af en vindmølle. Begrund svaret.

43. Hvilken effekt skal motoren i en helikopter yde for at holde helikopteren svævende? Begrund svaret.

Løsninger

42. Løsningen af vindmølleopgaven gives i form af en udfoldet version af den:
"En vindmølle omsætter bevægelsesenergi i vinden til f.eks. elektrisk energi. Vindhastigheden kaldes v og luftens massefylde ρ.
1. Hvor stor er vindens bevægelsesenergi pr. rumfangsenhed?
Møllevingernes overstrygningsareal kaldes A. Vingerne er stillet vinkelret på vindens retning.
2. Hvor stort et rumfang luft passerer A i et tidsrum Δt?
3. Hvor stor en mængde bevægelsesenergi når frem til overstrygningsarealet i et tidsrum Δt?
Møllen kan ikke levere større effekt (energi pr. tidsenhed) end bevægelsesenergien af den mængde luft, der når frem til overstrygningsarealet pr. tidsenhed (svarende til total opbremsning af luften ved møllen).
4. Hvad er formlen for denne øvre grænse for effekten af vindmøllen udtrykt ved A, v og ρ?".

Svarene er henholdsvis $\frac{1}{2}\rho v^2$, $Av\Delta t$, $\frac{1}{2}\rho Av^3\Delta t$ og endelig $\frac{1}{2}\rho Av^3$ som facit. Den øvre grænse for effekten af en vindmølle, $P_{\max}$, er altså:

$$P_{\max} = \frac{1}{2}\rho Av^3. \tag{1}$$

Den kan, bortset fra talfaktoren, også findes ved dimensionsanalyse.

43. Løsningen af helikopteropgaven ligger i en kombination af overslag over impuls- og energitilførslen per tidsenhed til luften. Antages virkningen af helikopterpropellen at være en lodret nedadgående luftstrøm med strømningshastigheden v og tværsnitsarealet A, vil impulstilførslen til luften per tidsenhed være $\rho Av \cdot v$, hvor ρ er luftens massefylde. Det er så ifølge Newtons anden lov lig med helikopterens kraftpåvirkning på luften og ifølge Newtons tredje lov også lig med luftens samlede kraftpåvirkning på helikopteren. Hvis helikopteren ikke bevæger sig i op- eller nedadgående retning, må det igen være lig med tyngdekraften, mg, på helikopteren, dvs.:

$$\rho Av^2 = mg \tag{2}$$

Energitilførslen til luften per tidsenhed er $\frac{1}{2}\rho Av \cdot v^2$. Indsættes v bestemt af ligning (2) heri, fås:

$$P_{\min} = \sqrt{\frac{m^3 g^3}{4\rho A}} \tag{3}$$

for den minimale effekt helikopterens motor skal yde for at holde helikopteren svævende. Hvis luften af helikopterens propel sættes i bevægelse udover den nedadgående, er kravet til motoren større end $P_{\min}$. Da mg optræder som samlet størrelse i problemet her, kan også ligning (3), bortset fra talfaktoren, findes ved dimensionsanalyse. For at benytte ligningen overslagsmæssigt kan A identificeres med helikopterpropellens overstrygningsareal.

Kommentarer

1. Breddeopgaverne har indtil sommeren 2007 i første omgang været stillet som eksamensopgaver på det såkaldte Breddekursus på RUC. Breddekurset, som var på 18 ECTS point og lå på tredje studieår efter det toårige basisstudie på RUC, er siden ved opdelingen af studierne i adskilte bachelordele og kandidatdele blevet delt i de to kurser "Fysisk problemløsning I" på 7,5 ECTS point og "Fysisk problemløsning II" på 7,5 ECTS point. Herefter ligger Fysisk problemløsning I (modsvarende den første halvdel af det gamle Breddekursus) som en del af bachelorstudiet og kan enten følges på basisstudiets andet år eller på bacheloruddannelsens tredje år efter basisstudiet. Hvorimod Fysisk problemløsning II (modsvarende den anden halvdel af det gamle Breddekursus) modsat er tænkt som "kronen på værket" mod slutningen af kandidatstudiet, hvor både de studerendes større fysikfaglige modenhed og deres større teoretiske ballast kan komme i spil. Det primære formål med begge de to nye kurser er fortsat, som med det tidligere Breddekursus, populært sagt, at man skal trænes i at tænke som en fysiker. Sekundært skal kurserne styrke deltagernes viden om og forståelse af fysiske fænomener og teorier indenfor klassisk og moderne fysik i bredden.

På grund af den forskellige placering i fysikstudiet af de to halvdele af det tidligere Breddekursus adskiller eksamenerne efter de to kurser sig nu fra hinanden. Eksamen i Fysisk problemløsning I inddrager kun det halve pensum af eksamen i Fysisk problemløsning II. Og vi forsøger at gøre opgaverne til eksamen i Fysisk problemløsning I mindre krævende end opgaverne til Fysisk problemløsning II. Modstillingen af vindmølleopgaven og helikopteropgaven i artiklen her kan tjene som illustration af det sidste. De to opgaver ligger pensummæssigt tæt op af hinanden. Men den ene er mere krævende end den anden efter vores vurdering. Vindmølleopgaven kunne være stillet til en Fysisk problemløsning I eksamen, hvorimod helikopteropgaven blev stillet for nylig til eksamen i Fysisk problemløsning II.

2. I KVANT nr. 3, oktober 2000, i KVANT nr. 1, april 2001 og i KVANT nr. 2, juli 2008 blev løsningerne til tre breddeopgaver som her med vindmølleopgaven givet i form af udfoldninger af opgaverne. De fire udfoldede og formaliserede opgaver tilhører et sæt på 12, der modsvarer 12 breddeopgaver. Som tidligere nævnt i serien af breddeopgaveartikler har jeg lavet sættet som et af midlerne til for de fysikstuderende på RUC at tydeliggøre, hvad det er for en slags bolde, der gås efter i en undervisning byggende på de åbent formulerede opgaver. Selvom der er et spring i sværhedsgrad fra vindmølleopgaven til helikopteropgaven, er det erfaringsmæssigt ikke så grundlæggende som springet fra den udfoldede til den åbne version af vindmølleopgaven. Det er derfor vigtigt at gå i dialog med de studerende om både størrelsen og relevansen af udfordringerne i arbejdet med åbent stillede problemer frem for de opgavetyper, de oftest har oplevet og er vant til.

3. Ovenstående udregning af den øvre grænse for effekten af en vindmølle er ufysisk derved, at den går ud fra fuldstændig opbremsning af vinden ved møllen med en umulig ophobning af luftmasserne til følge. Tages der højde for den nødvendige bortstrømning af luften efter dens nedbremsning ved møllen kan der argumenteres for at sænke den fundne øvre grænse med faktoren 16/27 under antagelse af, at luftens fart ved vindmøllen er gennemsnittet af farten før og efter møllen i et pænt strømlinierør. Under alle omstændigheder er resultatet $\rho A v^3$ gange et ukendt tal, som allerede fremgår af en dimensionsanalyse, væsentligt uanset tallet. Det har selvfølgelig f.eks. afgørende betydning for overslagsmæssige vurderinger af energiudbyttet ved forskellige placeringer og vindmøllehøjder, at v indgår i formlen i potensen 3 og ikke i f.eks. potensen 2 eller 4.

For mig er dette et eksempel på en af måderne fysik vekselvirker med teknologi på, nemlig ved at levere søkort for teknologiudviklingssejladsen. Men et er skib at føre, et andet søkort at forstå. Og teknologiudvikling er noget mere og andet end anvendt fysik.

Vindmølleverdenen er også leveringsdygtig i eksempler, der viser en tæt sammenvævning af fysik-og teknologiudvikling. Det gælder f.eks. ved udregningen af optimale vingeprofiler som en sag for specialister i aerodynamik.

For mig er vindmøller et godt case til illustration af forskelligartede eksempler på vekselvirkning imellem fysik og teknologi.

Breddeopgave 44.

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave (nr.44 i rækken her i KVANT):

Hvor knækker en væltende murstensskorsten under faldet? Begrund svaret.

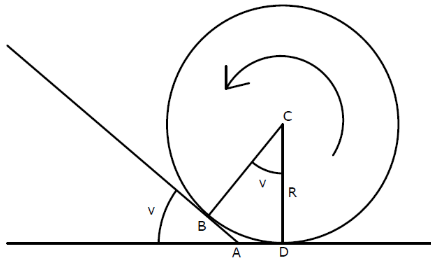
Løsning og kommentar bringes i næste nummer.

Kommentarer til breddeopgaven om rulning

I min oprydning i forrige nummer af tanketorsken ved retfærdiggørelse af brugen af momentsætningen om røringspunktet ved rulning med henvisning til, at punktet er i øjeblikkelig hvile, havde jeg selv introduceret en tanketorsk. Hvis overgangen imellem det vandrette plan og skråplanet ikke er udjævnet med en krumningsradius større end kuglens vil der ved overgangen finde et stød med tilhørende energitab sted, som der ikke var taget højde for i regningerne. Hvis der omvendt var en udjævning af overgangen kan opgaven løses med en energibetragtning som gjort, men så er det ikke simpelt at integrere bevægelsesligningerne. Jeg er blevet gjort opmærksom på fejlen af E.H. Hauge, som sammen med J.S. Høye har gennemregnet stødproblemet, der både er kompliceret og lærerigt at undersøge. Beregningerne kan findes på webadressen: http://home.phys.ntnu.no/rulleproblem.

En anden læser, Carl-Erik Sølberg, har sendt en alternativ løsning af breddeopgave nr. 41 om rulning:

Lad os først bemærke, at den lodrette højdeforskel mellem C og B (på figuren nedenfor) er $R \cdot \cos v$. Hvor B er røringspunktet mellem skråplan og cylinder, og C er centret for den cirkulære cylinder.



Når vi skal bruge energisætningen

$$\Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}} = W^{\text{non}}_{\text{indre}} + W^{\text{non}}_{\text{ydre}} \tag{4}$$

skal vi først bemærke, at systemet, vi anvender den på, er cylinderen og dernæst, at de ikke-konservative kræfters arbejde (højresiden) er nul. De indre kræfters arbejde er nul, da legemet er stift og friktionens arbejde er nul, da angrebspunktets hastighed er nul. Cylinderen ruller nemlig uden at glide. De konservative tyngdekræfters arbejde indregnes i den potentielle energi.

Så længe cylinderen ruller på det vandrette underlag er dens kinetiske energi lig:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= E_{\text{trans}} + E_{\text{rot}} \\ &= \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}(1+k)Mv_0^2 \end{aligned} \tag{5}$$

Når den er kommet op i det højeste punkt på skråplanen, da er massemidtpunktet løftet den lodrette højde:

$$x_{\text{top}} \cdot \sin v + R \cdot \cos v - R \tag{6}$$

Da B er løftet $x_{\text{top}} \cdot \sin v$, og udgangshøjden var R:

Dens potentielle energitilvækst er derfor:

$$\Delta E_{\text{pot}} = Mg(x_{\text{top}} \cdot \sin v + R \cdot \cos v - R) \tag{7}$$

Da den kinetiske energi er nul i toppunktet, er dens tilvækst:

$$\Delta E_{\text{kin}} = -\frac{1}{2}(1+k)Mv_0^2 \tag{8}$$

Vi finder altså, at

$$x_{\text{top}} = \frac{1+k}{2g \cdot \sin v}v_0^2 + \frac{R \cdot (1 - \cos v)}{\sin v} \tag{9}$$

Når dette resultat afviger fra Højgaards, skyldes det, at man skal anvende massemidtpunktets højdetilvækst og ikke røringspunktets. Når fejlen ikke opdages i forbindelse med de alternative løsningsmetoder, skyldes det, at massemidtpunktkoordinaten langs skråplanen sættes til nul, i det øjeblik cylinderen berører planen første gang. Altså, at Højgaard sætter x_0 til 0. Den bør rettelig sættes til AB, altså $x_0 = R \cdot (1 - \cos v)/\sin v$. Bevægelsesmængdesætningen skal anvendes på massemidtpunktspartiklen. Det er A, der har koordinaten nul!

Svar: Carl-Erik Sølberg har ret. Det er så tanketorsk nummer to i tilknytning til rulleopgaven (med den rigtige morale, at den normale retfærdiggørelsen af momenttagning om røringspunktet som om det var et fast punkt med henvisning til, at det momentant er i hvile, er en tanketorsk). For at undgå begge tanketorsk skulle opgaven have lydt: *En hul og en massiv cylinder ruller til en begyndelse med samme fart op ad et skråplan. Hvad er forholdet imellem, hvor langt de ruller yderligere op ad skråplanet? Begrund svaret.* Det er denne opgave beregningerne i KVANT-artiklen er løsningerne til.