Fisk – breddeopgave 60 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt to nye opgaver. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 60 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 60. Fisk

Som tommelfingerregel svømmer store fisk hurtigere end ligedannede små fisk. Forklar hvorfor.

Løsning

Hvis vi kalder den maksimale effekt en fisk kan levere til at bevæge sig med for P, modstanden imod fiskens bevægelse i vandet for D, og fiskens maksimalt opnåelige fart for v, gælder

$$P = D \cdot v \tag{1}$$

Hele effekten går til at overvinde bevægelsesmodstanden, når fisken har opnået sin maksimale fart og ikke mere bruger energi på at accelerere. Ligningen udtrykker, at energien per tid, P, leveret af fiskens muskler, via fiskens vekselvirkning med vandet omsættes til energitilførslen per tid, $D \cdot v$, til vandet.

En nærliggende antagelse om den maksimale effekt er, at den er proportional med fiskens muskelmasse. Så gælder $P \propto r^3$ for ligedannede fisk med r som en karakteriserende længde for den enkelte fisk.

Bevægelsesmodstandens afhængighed af r og v udover af fiskens form er i almindelighed indviklet, med ydergrænserne $D \propto \eta \cdot r \cdot v$ (ved laminar strømning af vandet omkring fisken) og $D \propto \rho \cdot r^2 \cdot v^2$ (ved fuldt udviklet turbulent kølvand bag fisken) for v henholdsvis meget lille og v meget stor. Her er η vandets viskositet og ρ dets vægtfylde.

Indsættes $P \propto r^3$ sammenholdt med $D \propto r \cdot v$ i ligning (1) fås $v \propto r$. Indsættes $P \propto r^3$ sammenholdt med $D \propto r^2 \cdot v^2$ i ligning (1) fås $v \propto r^{\frac{1}{3}}$. I begge tilfælde stiger v med r. Uanset om vi befinder os i den laminare grænse eller den fuldt udviklede turbulente grænse ses den maksimale svømmefart at stige med størrelsen, alt andet lige. Det er derfor nærliggende at antage, at det også – som tommelfingerregel – gælder i almindelighed.

Kommentar

I KVANT nummeret fra marts 2008 løste og kommenterede jeg følgende breddeopgave om luftmodstand:

Børn og voksne kommer i reglen ikke lige hurtigt ned ad bakke på cykel. Hvem kommer hurtigst ned? Begrund svaret.

Jeg fortalte om, hvordan der i breddekurset under fysikstudiet på RUC undervises i hydrodynamik ved hjælp af dimensionsanalyse. Herunder om, hvordan der kan argumenteres for formlerne $D \propto \eta \cdot r \cdot v$ og $D \propto \rho \cdot r^2 \cdot v^2$ for modstanden imod bevægelsen af en genstand i væske eller luft i henholdsvis den laminare og den fuldt udviklede turbulente grænse, alene ved dimensionsanalyse kombineret med grundlæggende fysiske overvejelser. I artiklen: J. H. Jensen, Introducing fluid dynamics using dimensional analysis, *Am. J. Phys.* **81** (9), 688-694 (2013), har jeg udvidet og uddybet KVANT-artiklens betragtninger.

Her vil jeg sammenholde de to breddeopgaver om henholdsvis fisks svømning og børn og voksnes cykling.

Det er kun, hvis η, ρ og r er holdt konstante, at størrelsen af v alene er afgørende for, hvornår vi kan forvente laminar strømning, turbulent kølvand eller noget midt imellem. I almindelighed er det den dimensionsløse kombination af η, ρ, r og v, Reynolds tal, $R_e = \rho \cdot r \cdot v / \eta$, der er afgørende. Det er derfor interessant at lave overslag over størrelsen af Reynolds tal for henholdsvis cykling og fisks svømning.

For luft ved stuetemperatur er $\eta/\rho = 15 \cdot 10^{-6}$ m^2/s. Udstrækningen $r = 1{,}5$ m og farten $v = 36$ km/time = 10 m/s giver så 10^6 for Reynolds tal. I betragtning af, at hverken voksne eller børn tilsammen med deres cykler udgør særligt strømlinjede genstande, må der med så stort et typisk Reynolds tal for cykling regnes med, at vi har fuldt udviklet turbulent kølvand efter cyklerne og tilsvarende hastighedskvadratisk bevægelsesmodstand, $D \propto \rho \cdot r^2 \cdot v^2$. I frigear på cykel ned ad bakke vil farten vokse indtil den når den konstante frigearsfart, der får den modsatrettede luftmodstand til at være lige så stor som komposanten af tyngdekraften langs med vejen, K_{gp}:

$$K_{gp} = D. \tag{2}$$

Da K_{gp} er proportional med massen af person plus cykel og dermed proportional med r^3, medfører ligning (2), sammenholdt med $D \propto \rho \cdot r^2 \cdot v^2$, $v \propto \sqrt{r}$ for den konstante frigearsfart. Så svaret på cykelopgaven er, at den voksne kommer hurtigst ned ad bakken.

For vand ved stuetemperatur er $\eta/\rho = 1{,}0 \cdot 10^{-6}$ m^2/s. En fisk med en fart og en størrelse som en cyklist vil derfor give anledning til et Reynolds tal på $15 \cdot 10^6$, altså 15 gange så stort som cyklistens. Det stiller overordentlig store krav til, hvor strømlinjet fisken er, hvis ikke den skal miste megen energi til et turbulent kølvand. For meget små fisk forholder det sig helt anderledes. Fx giver $r = 10^{-3}$ m og $v = 10^{-3}$ m/s et Reynolds tal på 1, hvor man skal forvente laminar strømning omkring fisken uanset dens form. I den grænse har vi $D \propto r \cdot v$ med sikkerhed og følgelig, at fiskens maksimale svømmehastighed er proportional med dens udstrækning, $v \propto r$. Det er i denne grænse, at det mest udpræget gælder, at større fisk kan indhente og æde mindre fisk.

Fiskeopgaven og cykelopgaven minder om hinanden. Det er først og fremmest forskellen imellem formlen i ligning (1) og formlen i ligning (2), der adskiller de to opgaver. I breddekurset på RUC bestræber vi os på ikke at stille opgaver, der med små modifikationer er gentagelser af allerede stillede og øvede opgaver i opgavesamlingen. De studerende skal trænes i fysisk problemløsning ved selv at skulle præcisere for dem nye problemer, fremfor at kunne reproducere kendte problemløsninger.

Men hvad menes der med et nyt problem fremfor et, hvor løsningsstrategien i forvejen er kendt? De to opgaver er modstillet her som illustration af, hvad vi i praksis anser for en tilstrækkelig stor forskel til, at den nye opgave udfordrer de studerende til mere end reproduktion af den gamle. Når og/eller hvis de studerende når frem til at se de to opgaver som variationer over samme tema, er meget af målet med undervisningen nået.

Breddeopgave 61 og 62. Elastisk fotonspredning på atomer og puck kollisioner.

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningerne til disse to opgaver fra breddekurset på RUC (fra sommereksamen 1977 og sommereksamen 2013, nr. 61 og 62 i rækken her i KVANT):

En foton spredes elastisk på et atom (atomet er i sin grundtilstand før og efter spredningen), således at fotonens bevægelsesretning efter spredningen danner en vinkel med den oprindelige. Hvordan afhænger forskellen mellem fotonens bølgelængde før og efter spredningen af spredningsvinklen? Begrund svaret.

En ishockey puck i fart på isen støder ind i en hvilende puck magen til. Puckerne kan være roterende før og efter sammenstødet, og der kan både ske ændringer af deres rotationsenergier og udvikles varme og indre svingninger i de to pucker. Hvordan afhænger vinklen imellem bevægelsesretningerne af de to pucker efter sammenstødet af, om den samlede translatoriske kinetiske energi er øget, uændret eller formindsket ved stødet? Begrund svaret.

Løsninger og kommentar bringes i næste nummer.