Bræt imod væg og selvinduktion i koaksialkabel
– breddeopgave 63 og 64 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, NSM, RUC

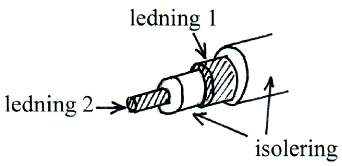
Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsninger og kommentar til opgaverne fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaverne i sidste nummer af KVANT var disse breddeopgaver (nr. 63 og 64 i rækken her i KVANT):

Breddeopgave 63 og 64. Bræt imod væg og selvinduktion i koaksialkabel.

Ved hvilken hældning skrider et bræt, der er stillet skråt op af en forholdsvis glat væg? Begrund svaret.

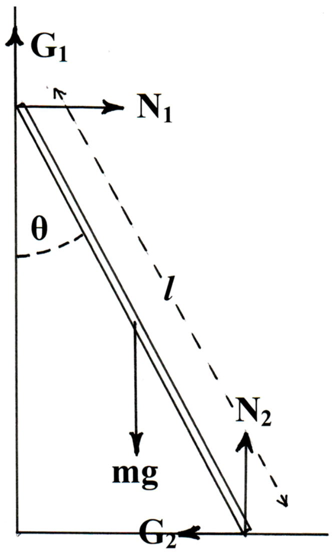
I et elektrisk kredsløb indgår et stykke koaksialkabel (jf. figuren), hvor strømmene i dets to ledninger er lige store og modsat rettede.



Hvor meget bidrager kablet til kredsløbets selvinduktionskoefficient (induktans)?

Løsninger

63. På skitsen af brættet skråtstillet mod væggen er indtegnet normalreaktionerne $\boldsymbol{N_1}$ og $\boldsymbol{N_2}$ på brættet fra henholdsvis væggen og gulvet og de statiske gnidningskræfter $\boldsymbol{G_1}$ og $\boldsymbol{G_2}$, ligeledes fra henholdsvis væg og gulv.



Figur 1. Bræt skråtstillet imod væg.

Brættets længde kaldes l og det antages at have en ligelig massefordeling med tyngdepunkt i midten. Brættets masse kaldes m, så tyngdekraften på det er $m\boldsymbol{g}$. Brættets vinkel med lodret kaldes Θ.

I opgaven antages G_1 tilnærmelsesvis lig nul. Så længe brættet ikke skrider, gælder da for summen af de vandrette kræfter:

$$N_1 - G_2 = 0, \tag{1}$$

for summen af de lodrette kræfter:

$$N_2 - mg = 0, \tag{2}$$

og for summen af kraftmomenterne om tyngdepunktet:

$$N_1 \frac{l}{2} \cos\Theta + G_2 \frac{l}{2} \cos\Theta - N_2 \frac{l}{2} \sin\Theta = 0. \tag{3}$$

De tre ligninger fastlægger entydigt N_1, N_2 og G_2 som funktioner af Θ og mg til at være:

$$N_2 = mg; N_1 = \frac{mg}{2}\tan\Theta; G_2 = \frac{mg}{2}\tan\Theta. \tag{4}$$

Gnidningskraften G_2 kan ikke blive større end $\mu_2 N_2$, hvor μ_2 er den statiske gnidningskoefficient imellem bræt og gulv. Dette indtræffer, når

$$\tan\Theta = 2\mu_2, \tag{5}$$

og så skrider brættet.

64. Opbygningen af en strøm I i et elektrisk kredsløb med selvinduktionskoefficienten L kræver arbejdet $\frac{1}{2}LI^2$. Opgaven kan besvares ved at identificere dette med energiindholdet af det magnetiske felt i koaksialkablet. Energitætheden af et magnetfelt er $\frac{1}{2\mu_0}B^2$, hvor B er styrken af magnetfeltet og μ_0 er permeabilitetskonstanten i vakuum. Ifølge Amperes lov er B i mellemrummet imellem koaksialkablets to ledninger givet ved:

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \tag{6}$$

i afstanden r fra kablets midte. Den samlede opmagasinerede energi E i mellemrummet i et koaksialkabel med længden l er derfor:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\mu_0}\int_{r_1}^{r_2} B(r)^2 l 2\pi r dr \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} l I^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} l I^2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right), \end{aligned} \tag{7}$$

hvor r_1 er radius af den indre ledning, og r_2 er den indre radius af den ydre ledning. Uden for den ydre ledning er magnetfeltet nul, fordi den samlede strøm igennem en flade med rand uden om den ydre ledning er nul. Der er også magnetfelter og opmagasineret energi i de to ledninger. Hvis tykkelsen af dem er lille i forhold til mellemrummets tykkelse kan vi se bort herfra. Ved at sammenholde ligning (7) med, at den opmagasinerede energi er lig med det arbejde, det har krævet at opmagasinere den, $E = \frac{1}{2}LI^2$, fås i denne grænse:

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \tag{8}$$

som svar på opgaven.

Kommentar

Skridningen af det hældende bræt imod en glat væg er et hyppigt valgt eksempel på en statisk beregning i introducerende fysiklærebøger på universitetsniveau. Men hvad nu, hvis væggen ikke er glat? Hvorfor forekommer dette eksempel ikke i lærebøgerne?

Hvis $G_1 \neq 0$ skal ligningssystemet (1), (2) og (3) ændres til:

$$N_1 - G_2 = 0, \tag{9}$$

$$G_1 + N_2 - mg = 0, \tag{10}$$

og

$$G_1\frac{l}{2}\sin\Theta + N_1\frac{l}{2}\cos\Theta + G_2\frac{l}{2}\cos\Theta - N_2\frac{l}{2}\sin\Theta = 0. \tag{11}$$

Vi har da stadig kun tre ligninger til at bestemme de nu fire ubekendte N_1, N_2, G_1 og G_2 som funktioner af Θ og mg i den statiske situation. Det lader sig jo ikke gøre entydigt. Der er mange forskellige måder, kræfterne N_1, N_2, G_1 og G_2 kan kombineres på, som opfylder ligningerne (9), (10) og (11). Når et bræt står lænet op af en væg, kan man altså ikke alene ud fra iagttagelse af det beregne kræfterne imellem bræt og væg og bræt og gulv, medmindre væggen antages glat. Det er nok derfor eksemplet ikke forekommer i lærebøgerne, selvom ru vægge forekommer hyppigere end glatte vægge i praksis. Det er ligesom i Storm P-tegningen af manden, der leder efter sin gadedørsnøgle under gadelygten, selvom han tabte den i mørket, fordi det kun er under lygten, der er lys til at finde noget. Måske er det sådan, at vi i fysik løser de problemer, fysik kan kaste lys på, og lader resten ligge.

Er hældningen, hvor brættet skrider, også ubestemt, når væggen er ru? Nej, brættet skrider ved en bestemt hældningsvinkel. Der er to grænser for de statiske gnidningskræfter, $G_1 \leq \mu_1 N_1$ og $G_2 \leq \mu_2 N_2$, hvor μ_1 er den statiske gnidningskoefficient imellem bræt og væg. Så længe disse to uligheder kan opfyldes, står brættet fast. Hvis grænsen for den ene af ulighederne nås, fx $G_1 = \mu_1 N_1$, fastlægger denne ligning, sammen med ligningerne (9), (10) og (11), entydigt N_1, N_2, G_1 og G_2 som funktioner af Θ og mg. Skrider brættet da? Nej, der er stadig en krog i det. Det skrider først, når det løfter sig af begge kroge: $G_1 = \mu_1 N_1$ og $G_2 = \mu_2 N_2$. Skridningen er derfor fastlagt ved disse to ligninger sammen med ligningerne (9), (10) og (11). Skridningen finder sted ved den vinkel, der kan findes ved løsning af de fem ligninger med de fem ubekendte N_1, N_2, G_1, G_2 og fx $\tan\Theta$. For skridningsvinklen findes herved:

$$\tan\Theta = \frac{2\mu_2}{1 - \mu_1\mu_2} \tag{12}$$

Resultatet ses at stemme overens med ligning (5) for $\mu_1 = 0$. Resultatet er eftervist eksperimentelt (se J. Bennett and A. Mauney, "The Static Ladder Problem with Two Sources of Friction", *THE PHYSICS TEACHER* **49**, 567-569 (2011)).

Også koaksialkabelopgaven er et eksempel på, at fysik, mere end så mange andre fag, er et fag efter devisen: Svar haves, spørgsmål søges.

Spørgsmålet i koaksialkabelopgaven er velvalgt i forhold til svaret, at energien i det opbyggede magnetfelt ved selvinduktion kan identificeres med $\frac{1}{2}LI^2$. Men hvad hvis der blev spurgt om selvinduktionsbidraget fra en almindelig ledning? Så kommer vi umiddelbart i vanskeligheder. Regningerne tilsvarende løsningen af koaksialkabelopgaven fører til ligning (8) med $r_2 = \infty$, dvs. en uendelig selvinduktionskoefficient. I dette mere almindelige tilfælde er vi ved brugen af Amperes lov derfor nødt til at tage højde for, at strømmen i ledningen forudsætter et kredsløb, og at strømmen igennem et plan vinkelret på netop et kredsløb løber begge veje igennem planet. Magnetfelterne fra de to gennemløb ophæver da tilnærmelsesvis hinanden i afstande fra kredsløbet, der er store i forhold til kredsløbets udstrækning d. En tilnærmelse til kredsløbets selvinduktionskoefficient er så ligning (8) med d indsat i stedet for r_2.

Både i tilfældet brættet imod den glatte væg og i tilfældet selvinduktionskoefficientsbidraget fra koaksialkablet er der spurgt til specialtilfælde, som teknisk set ikke er repræsentative, men som til gengæld lader sig belyse med de umiddelbart tilgængelige fysiklamper. Sådan er det ofte i fysikundervisning, fordi den mere orienterer sig imod læring af tankegange end imod tilegnelse af fænomenviden. Ifølge den fysikuddannede videnskabsteoretiker Thomas Kuhn er det også typisk sådan i fysikforskning. I efterskriftet fra 1969 til hans meget refererede bog "Videnskabens Revolutioner" karakteriserer han fag ved deres såkaldte "faglige matrix" (i første omgang brugte han begrebet "paradigme" til også at karakterisere fag). En afgørende ingrediens i et fags matrix er en række "eksemplarer", konkrete problemløsninger, som fagets udøvere via deres uddannelse er fælles om, og som kan tjene som forbilleder på en større klasse af problemstillinger. Eksemplarerne er svarene, hvis anvendelighed i forhold til en udvidet klasse spørgsmål undersøges.

Fysikere behøver ikke at være flove over at praktisere og uddanne studerende til devisen: Svar haves, spørgsmål søges. Det er karakteristisk for teoretisk orienteret normalvidenskab. Hvorimod praktisk orienteret videnskab opererer efter den nemmere forståelige devise: Spørgsmål haves, svar søges. Derfor er praktisk orienteret videnskab mere end anvendt teoretisk videnskab. Og derfor kan fx ingeniørvidenskab ikke reduceres til anvendt fysik.

Breddeopgave 65. Temperaturbølger

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen september 1987, nr. 65 i rækken her i KVANT):

Temperaturændringerne på Jordens overflade i løbet af døgnet, i løbet af året og fra istid til istid afspejler sig hver for sig i dæmpede temperaturbølger ned gennem undergrunden. Hvordan afhænger bølgelængden af svingningstiden og undergrundens egenskaber? Begrund svaret.

Løsning og kommentar bringes i næste nummer.