

# Temperaturen og den nye kelvin

Finn Berg Rasmussen, Niels Bohr Institutet, Københavns Universitet og KVANT

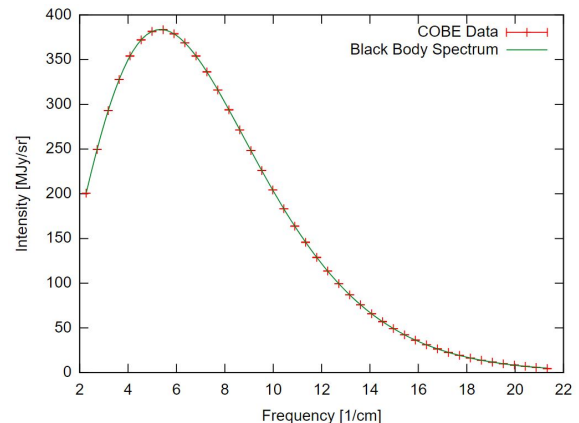
Fra 13. til 16. november 2018 har Generalkonferencen for Mål og Vægt holdt sit 26. møde. Her godkendtes nye definitioner af fire af SI-systemets grundenheder, kilogram, ampère, kelvin og mol. De sidste forberedelser til denne ændring har stået på siden 2011, hvor den 24. Generalkonference formulerede krav til målenøjagtighed og reproducerbarhed som forudsætning for nye definitioner.

## De nye definitioner

Hver af de oprindelige internationale enheder var baseret på en størrelse af samme slags: Enheden for masse – et kilogramlod – var selv en masse, enheden for længde var en meterstok, altså en længde, enheden for temperatur blev fastlagt ved et temperaturinterval osv. Med udviklingen af stadigt stigende nøjagtighed og pålidelighed af målemetoder er det blevet muligt at måle og reproducere værdier af nogle af naturkonstanterne mere præcist, end de relevante måleenheder kan realiseres. Når dette indtræffer, bliver det rimeligt at opdatere enhedernes definition. I de officielle papirer fra BIPM (Bureau International des Poids et Mesures) understreges det, at dette års nye definitioner kun har betydning i tilfælde, hvor der kræves helt ekstrem nøjagtighed. I almindelig målepraksis vil man ikke mærke noget til ændringerne.

*Sekundet* blev i 1968 defineret gennem en nøje specificeret overgangsfrekvens i atomer af cæsium-133. *Meteren* har siden 1983 været defineret som den afstand, lyset tilbagelægger i en vis tid, det vil sige, at lyshastigheden er blevet tildelt en bestemt værdi. De nye definitioner af yderligere fire af de syv grundenheder går videre ad denne vej, idet fire relevante naturkonstanter defineres med hver sin bestemte værdi. Det siger sig selv, at disse værdier er de nøjagtigste, man indtil nu har kunnet bestemme og reproducere mellem forskellige standardlaboratorier [1] og ved forskellige metoder på grundlag af de eksisterende enheder.

Mens man let kan forestille sig et særligt fint kilogramlod som international masseenhed, er det betydeligt sværere at se, at det nu kan erstattes af en defineret værdi af Plancks konstant (i kombination med meteren og sekundet). Det eksperimentelle grundlag er tidligere beskrevet i KVANT [2]. En ampère bliver nu defineret gennem elektronens ladning, hvilket til gengæld er langt mere pædagogisk – man kan lige se for sig strømmen af elektroner gennem en ledning fremfor de mere u håndgribelige virkninger af et magnetfelt. Det samme kan siges om definitionen af mol: nu tildeles Avogadros tal en bestemt værdi, og dét er antallet af atomer, molekyler eller andet i et mol. For temperatur tager man konsekvensen af, at den, som påpeget af Feynman [3], dybest set er et mål for en (gennemsnits)energi, og definerer enheden kelvin ved hjælp af omsætningsfaktoren mellem energi og temperatur, Boltzmanns konstant. Om man under denne nye filosofi kan finde temperaturen, er emnet for denne artikel.



**Figur 1.** Baggrundsstrålingen fra universet ligner en perfekt sortlegeme-stråling fra et legeme med  $T = 2,72548 \pm 0,00057$  K [4].

## Plancks strålingslov

Danmarks første kvindelige fysiker Kirstine Meyer beskæftigede sig [5] indgående med de tidlige forestillinger om varmt og koldt. Begyndelsen til vores temperaturbegreb sås først omkring år 1600, hvor Galilei benyttede et instrument, som vi ville kalde et luft- eller gastermometer. Efter min mening må oldtidens smede imidlertid have været i stand til at bruge varmestråling for at vurdere, hvornår deres glødende jern har været passende varmt. Det har de kunnet gøre, fordi farven på udstrålingen afhænger af jernets temperatur: rødglødende jern er meget varmt – hvidglødende endnu varmere.

En genstand ved temperaturen  $T$  udsender en elektromagnetisk stråling, hvis intensitet  $I(\nu)$  afhænger af frekvensen  $\nu$ , som beskrevet i *Plancks strålingslov*:

$$I(\nu) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (1)$$

Her betyder  $c$  lyshastigheden,  $h$  Plancks konstant og  $k$  Boltzmanns konstant.

Strengt taget skal genstanden kunne betragtes som et absolut sort legeme, dvs. et legeme, der absorberer al stråling (alle bølgelængder), der rammer det. Det er ren matematik at regne ud, at funktionen  $I(\nu)$  har maksimum, når den dimensionsløse størrelse  $z = h\nu/(kT)$  har en vis værdi  $z_0$  ( $\approx 2.82$ ). Hvis den tilsvarende frekvens er  $\nu_0$ , er temperaturen

$$T = \frac{h\nu_0}{kz_0}. \quad (2)$$

Heraf ses, at spektret flytter til højere frekvens, når temperaturen stiger.

Langt større nøjagtighed opnås, hvis man kan måle hele spektret og tilpasse Planck-funktionen i ligning (1) med temperaturen som tilpasningsparameter. Det mest spektakulære eksempel på dette er baggrundsstrålingen fra universet, der ligner en perfekt sortlegeme-stråling fra et legeme med  $T = 2,72548 \pm 0,00057$  K [4]. Strålingen ligger i øvrigt i mikrobølgeområdet, idet frekvensen  $\nu_0$  ved maksimum er ca. 160 GHz.

I praksis er der mange tilfælde, hvor det er en stor fordel, undertiden eneste udvej, at bruge Planck-strålingen til temperaturmåling. Instrumenter til dette brug, pyrometre, findes i forskellige varianter, blandt andre mange håndholdte. De første pyrometre indeholdt en glødetråd, hvis temperatur kunne reguleres med en elektrisk strøm, indtil farven passede med det undersøgte objekt. Blandt moderne pyrometre har nogle en varmefølsom sensor, som opfanger hele spektret. Andre har frekvens-selektive sensorer eller filtre. Teoretisk kan den samlede intensitet  $I$  (den samlede varmestråling) i spektret findes ved en rigtig lærebogsberegning, hvis resultat er

$$I = \int_0^{\infty} I(\nu) d\nu = \sigma T^4, \quad (3)$$

hvor  $\sigma$  er en konstant, Stefan-Boltzmann-konstanten:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}. \quad (4)$$

Varmestrålingen har således en meget stærk temperaturafhængighed.

Som nævnt forudsætter de foregående ligninger, at strålingen kommer fra et "absolut sort legeme". Man taler også om "hulrumsstråling". Den sidste betegnelse skyldes, at ligning (1) er udledt ved at analysere mulighederne for stående elektromagnetiske bølger i et lukket hulrum. Jo kortere bølgelængde, der betragtes, jo flere bølgemuligheder vil der være, og en klassisk-fysisk beregning ville medføre, at energitætheden blev uendeligt stor ("ultravioletkatastrofen"). Korte bølgelængder betyder høje frekvenser og dermed høje fotonenergier  $h\nu$ . Sandsynligheden for høje energier ved en given temperatur aftager imidlertid kraftigt med voksende energi (se Boltzmann-faktoren ligning (5) nedenfor), hvorfor man når til en endelig energitæthed. Fotonstrømmen ud af en lille åbning fra hulrummet ud til det fri vil afspejle frekvensfordelingen inde i hulrummet.

Udstrålingen fra virkelige genstandes overflader vil opvise mindre eller større afvigelser fra Planck-fordelingen [6]. For det meste reflekterer blankpolerede metaloverflader som bekendt omtrent alle bølgelængder i det synlige område. Når kobber er rødt, skyldes det absorption af højere fotonenergier end svarende til rødt. Planternes blade er grønne, fordi klorofyl absorberer kraftigt i rødt og i blå og svagere midt i spektret. Det forhindrer ikke, at udstrålingen fra en given genstand er temperaturafhængig. Hvis der kræves stor nøjagtighed, må man derfor ved brug af et pyrometer være opmærksom på, hvilket spektrum instrumentet er kalibreret ved.

## Paramagnetisme. Boltzmann-faktoren

Ved behandling af systemer, der består af mange partikler, må man anvende statistisk fysik. Strålingsloven var den første anvendelse på et kvantesystem.

Lad os se på et simpelt system bestående af et stort antal ens partikler, som hver især kun har to kvantetilstande med energierne  $\epsilon_1$  og  $\epsilon_2$ . Det kan være en samling elektroner i et magnetfelt, hvor elektronernes spin kun kan pege enten "op" eller "ned". Elektronens magnetiske moment vil så forårsage en energiforskel  $\epsilon_2 - \epsilon_1$  mellem de to spinretninger. Energiforskellen kan måles i et resonansforsøg, hvor elektronerne absorberer elektromagnetiske kvanter  $h\nu$ . Den enkelte partikels magnetiske moment  $\mu$  kan fås af energiforskellen ved division med magnetfeltet. Ved enhver endelig temperatur vil antallet  $N_1$  af spin i det nederste niveau være større end antallet  $N_2$  i det øverste. Forskellen giver anledning til et samlet magnetisk moment (en magnetisering), hvis absolutte størrelse kan findes ud fra resonansspektret eller ved susceptibilitetsmålinger. Med kendskab til  $N_1 - N_2$  og til det samlede antal  $N = N_1 + N_2$  kan antallene  $N_1$  og  $N_2$  beregnes hver for sig. Forholdet imellem dem er ifølge den statistiske fysik bestemt ved *Boltzmann-faktoren*, som indeholder temperaturen:

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{kT}\right). \quad (5)$$

Temperaturen kan herefter beregnes af ligning (5), men metoden har sine begrænsninger. For det første er de involverede energier så små, at Boltzmann-faktoren er meget tæt på 1, undtagen ved millikelvintemperaturer (eller for atomkernespin, mikrokolvintemperaturer). For det andet gælder det simple billede kun, hvis partiklernes momenter ikke påvirker hinanden. Spinsystemet kan have en ordnet tilstand, fx ferromagnetisk, ved lav temperatur, og når man nærmer sig denne, kan ligning (5) ikke længere bruges. For det tredje er det altid vanskeligt at måle absolutte størrelser.

## Klassisk termodynamik

Noget af det første, man møder i traditionel varmelære, er tilstandsligningen for en såkaldt ideal gas:

$$pV = nRT, \quad (6)$$

hvor  $p$  er gassens tryk,  $V$  rumfanget og  $n$  stofmængden (med enheden mol). Gaskonstanten  $R$  er defineret i det nye SI, idet den er produktet af Avogadros konstant  $N_A$  og Boltzmanns konstant  $k$ ,  $R = N_A k$ . Man skal altså blot måle tryk og rumfang af en vis mængde gas for at kunne beregne temperaturen. Det ser ganske let ud, og ligningen er anvendelig over et stort temperaturområde.

Men hvordan kan man vide, om gassen kan betragtes som ideal under de anvendte betingelser? Man kunne måle isotermer og prøve, om  $pV$  er konstant (der findes mange temperaturfølsomme detektorer, der i hvert fald kan bruges til at *genkende* en temperatur). Herudover kommer vanskeligheden ved at måle rumfang og stofmængde med tilstrækkelig nøjagtighed. I det eksisterende SI er temperaturen af rent vands triplepunkt defineret med 5 betydende cifre (273,16 K

eksakt), og den nye SI-kelvin ( $k$  med 7 betydende cifre) er kun relevant, hvis man kan gøre det bedre.

### Boks 1: Grundenhederne i det nye SI

(Uddrag af forslag til resolution A ved CGPM's 26. møde 13.-16. november 2018. Oversat fra den engelske tekst).

CGPM har på sit 26. møde besluttet, at fra den 20. maj 2019 er Det Internationale Enhedssystem, SI, det enhedssystem, hvor:

- frekvensen svarende til hyperfinopsplittningen af den uperturberede grundtilstand i atomer af cæsium-133  $\Delta\nu_{Cs}$  er 9.192.631.770 hertz (eksakt),
- lyshastigheden i vakuum  $c$  er 299.792.458 meter per sekund (eksakt),
- Plancks konstant  $h$  er  $6,62607015 \times 10^{-34}$  joule sekund (eksakt),
- elementarladningen  $e$  er  $1,602176634 \times 10^{-19}$  coulomb (eksakt),
- Boltzmanns konstant  $k$  er  $1,380649 \times 10^{-23}$  joule per kelvin (eksakt),
- Avogadros konstant  $N_A$  er  $6,02214076 \times 10^{23}$  reciprokke mol (eksakt),
- lysstyrken  $K_{cd}$  af monokromatisk stråling ved frekvensen  $540 \times 10^{12}$  Hz er 683 lumen per watt (eksakt),

hvor

hertz, joule, coulomb, lumen og watt, med de respektive symboler Hz, J, C, lm og W, er relateret til enhederne sekund, meter, kilogram, ampère, kelvin, mol og candela, med de respektive symboler s, m, kg, A, K, mol og cd, ved ligningerne  $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$ ,  $\text{J} = \text{m}^2\text{kg s}^{-2}$ ,  $\text{C} = \text{s A}$ ,  $\text{lm} = \text{cd m}^2\text{m}^{-2} = \text{cd sr}$ , og  $\text{W} = \text{m}^2\text{kg s}^{-3}$ .

Ligningen (6) siger, at for et konstant rumfang er gassens tryk proportionalt med temperaturen. Det har gjort dette *lufttermometer* til et vigtigt instrument under termometriens udvikling gennem flere århundreder. Den første tanke om et absolut temperaturnulpunkt stammer herfra, idet Amontons i 1703 fremsatte den idé, at hvis trykket blev nul, havde man nået en tilstand, hvor varmen var forsvundet.

Ifølge ligning (6) er det let at finde *forholdet* mellem to temperaturer, men det skulle gerne være forholdet mellem de termodynamiske temperaturer. Hertil kræves mere omstændelige termodynamiske målinger. Én metode har været at bruge Clapeyrons ligning for

ligevægten mellem to faser:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)}. \quad (7)$$

Den har fx været brugt langs damptrykskurven for vand, hvor  $L$  så betyder fordampningsvarmen af en vis mængde vand, og  $V_2 - V_1$  er forskellen i rumfang mellem mættet damp og væske for den samme mængde. Ligningen kan omformes til

$$\frac{dT}{T} = (V_2 - V_1) \frac{dp}{L}, \quad (8)$$

hvor højresiden kan måles i små skridt langs damptrykskurven, og ved integration langs denne fra trykket  $p_1$  til trykket  $p_2$  findes  $\ln(T_2/T_1)$ , altså forholdet mellem de to tilsvarende termodynamiske temperaturer. Metoden har ligeledes været anvendt ved millikelvin-temperaturer på fase-ligevægten mellem fast og flydende helium-3 [7]. Her spiller Boltzmanns konstant  $k$  direkte ind som referencepunkt, fordi det eneste bidrag af betydning til entropien  $S$  kommer fra de frie kernespin i fast  $^3\text{He}$  og kan beregnes (fx er  $S = N_A k \ln 2$  i den helt uordnede tilstand)

### Boks 2: Den internationale temperaturskala. Fixpunkter i definitionen af ITS-90:

Stof	Fixpunktets art	$T_{90} / \text{K}$
helium, He	V	3-5
brint, H <sub>2</sub>	T	13,8033
H <sub>2</sub> eller He	V	≈17
H <sub>2</sub> eller He	V	≈20,3
neon, Ne	T	24,5561
ilt, O <sub>2</sub>	T	54,3584
argon, Ar	T	83,8058
kviksølv, Hg	T	234,3156
vand, H <sub>2</sub> O	T	273,16
gallium, Ga	M	302,9146
indium, In	F	429,7485
tin, Sn	F	505,078
zink, Zn	F	692,677
aluminium, Al	F	933,473
sølv, Ag	F	1234,93
guld, Au	F	1337,33
kobber, Cu	F	1357,77

V damptryk; T triplepunkt; M smeltepunkt; F frysepunkt.

I den benyttede brint skal ortho- og para-brint være i ligevægt.

### Den internationale temperaturskala ITS-90

I flere af ovenstående eksempler er det noget vanskeligt at se, hvordan Boltzmanns konstant skal komme ind

som reference. Hvis man ikke lige har brug for den yderste nøjagtighed, er der imidlertid hjælp at hente.

Til brug ved nøjagtig termometri blev der i 1989 aftalt en praktisk temperaturskala, ITS-90. Denne internationale temperaturskala af 1990 er konstrueret således, at dens temperaturangivelser  $T_{90}$  stemmer overens med den termodynamiske temperatur inden for den målenøjagtighed, som kunne realiseres på den tid, hvor skalaen blev aftalt. Skalaen er etableret ved hjælp af en række termometriske fixpunkter og en række måleforskrifter for interpolation imellem fixpunkterne. ITS-90 omfatter alle temperaturer over 0,65 K, se boks 2

Lavere temperaturer, fra 0,9 mK til 1 K, dækkes af en "Provisional Low Temperature Scale", PLTS-2000, som angiver smeltepunktstrykket af  $^3\text{He}$  som funktion af temperaturen i form af et polynomium med 13 led.

Disse praktiske skalaer vil være gyldige, indtil Generalkonferencen eller dens underkomiteer aftaler noget andet.

Til at etablere andre temperaturer er der foreskrevet en række eksperimentelle metoder sammen med interpolationsformler, der angiver  $T_{90}$  som funktion af den målte størrelse. Formlerne indeholder konstanter, hvoraf nogle er foreskrevne, mens andre skal findes ved kalibrering i fixpunkterne. Hver metode dækker sit temperaturområde:

1. fra 0,65 K til 5,0 K: Damptrykket af  $^3\text{He}$  og  $^4\text{He}$ .
2. fra 3,0 K til neons triplepunkt: Gastermetri med  $^3\text{He}$  og  $^4\text{He}$ .
3. fra brints triplepunkt til sølvs frysepunkt: Elektrisk modstand af en tråd fremstillet af ren platin.
4. temperaturer over sølvs frysepunkt: Plancks strålingslov.

## Litteratur

- [1] [www.bipm.org](http://www.bipm.org)
- [2] F. B. Rasmussen (2012) "SI-systemet under revision", KVANT, bind 22 nr. 1, side 3-6.
- [3] R. P. Feynman, R. B. Leighton og M. Sands (1977) "The Feynman Lectures on Physics", Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, side 39-10.
- [4] [upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cd/Cmbr.svg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cd/Cmbr.svg)
- [5] K. Meyer (1909) "Temperaturbegrebets udvikling gennem tiderne samt dets sammenhæng med vekslede forestillinger om varmets natur", Gjellerup, København.
- [6] J. O. Henningsen: "Farve", i Den Store Danske, Gyldendal, [denstoredanske.dk/index.php?sideId=74478](http://denstoredanske.dk/index.php?sideId=74478)
- [7] D. S. Greywall (1986) *Phys. Rev. B*, **33**, 7520; W. P. Halperin, C. N. Archie, F. B. Rasmussen og R. C. Richardson (1975) *Phys. Rev. Lett.*, bind **34**, side 718.



Finn Berg Rasmussen er emeritus ved Niels Bohr Institutet, pensioneret 2006. Har forsket i faststoffysik ved lave temperaturer: metallers elektriske egenskaber, organiske superledere, magnetisme fra atomkernernes spin i  $^3\text{He}$ , Ag og Rh. Medlem af KVANTs redaktion.

## Klodesprængning - breddeopgave 79 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

*Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.*

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 79 i rækken her i KVANT):

### Breddeopgave 79. Klodesprængning

*Hvilken indflydelse har massetætheden på, hvor hurtigt kloder kan rotere om sig selv uden at sprænges? Be- grund svaret.*

### Løsning

Lad os for nemheds skyld antage, at en klode har samme massetæthed  $\rho$  overalt. Vi kalder vinkelhastigheden for klodens rotation om sig selv  $\omega$ , og klodens radius  $R$ . En prøvemasse  $m$  på klodens overflade ved klodens ækvator er da påvirket af gravitationskraften

$$F_G = Gm \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \frac{1}{R^2} = Gm \frac{4}{3} \pi R \rho \quad (1)$$

indad.  $G$  er gravitationskonstanten. Samtidig er prøvemassen påvirket af centrifugalkraften

$$F_C = mR\omega^2 \quad (2)$$

udad. Kloden sprænges, hvis  $F_C$  er større end  $F_G$ . Og det ses at ske for

$$\omega > \sqrt{4\pi G\rho/3}. \quad (3)$$

Det er bemærkelsesværdigt, at klodens størrelse, når vi spørger til den kritiske rotationshastighed, ikke spiller nogen rolle.

### Kommentar

Opgaveløsningen er ikke afhængig af den simplificerende antagelse om, at massen af kloden er homogent fordelt. Vi kan nøjes med at antage samme massefylde i samme dybde. Så er middelværdien af massefylden givet ved

$$\langle \rho \rangle = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr / V, \quad (4)$$

hvor  $V$  er klodens volumen  $\frac{4}{3}\pi R^3$ . Ifølge Newtons teorem om massetiltrækningen fra en homogen kugleskal kan vi i stedet for ligning (1) skrive:

$$F_G = Gm \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr / R^2 = Gm \frac{4}{3}\pi R \langle \rho \rangle. \quad (5)$$

For en lagdelt klode ses betingelsen i ligning (3) derfor stadig at gælde, blot skal  $\rho$  erstattes med  $\langle \rho \rangle$ .

Opgaven kan også besvares ved dimensionsanalyse. Den kritiske rotationshastighed  $\omega_{kr}$  kan tænkes at afhænge af  $\rho$  (eller  $\langle \rho \rangle$ ),  $G$  og  $R$ . Vi antager da:

$$\omega_{kr} = k\rho^\alpha G^\beta R^\gamma. \quad (6)$$

Her er  $k$  nødvendigvis et rent tal, da der indgår tidsdimension i  $G$ , men ikke i  $\rho$  og  $R$ , hvorfor der ikke kan dannes en dimensionsløs kombination af  $\rho$ ,  $G$  og  $R$ . Kravet om ens dimension på begge sider af lighedstegnet indebærer:

$$T^{-1} = (ML^{-3})^\alpha (M^{-1}L^3T^{-2})^\beta L^\gamma. \quad (7)$$

Da  $M$  for masse,  $L$  for længde og  $T$  for tid, som valgte basisdimensioner, ikke kan reduceres til hinanden, skal deres potenser stemme overens hver for sig. Det giver ligningssystemet:

$$M: 0 = \alpha - \beta \quad (8)$$

$$L: 0 = -3\alpha + 3\beta + \gamma \quad (9)$$

$$T: -1 = -2\beta, \quad (10)$$

med den entydige løsning  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$ , og  $\gamma = 0$ , svarende til ligning (3). At  $\omega_{kr}$  ikke afhænger af klodens størrelse, kunne vi ikke have gættet forud for dimensionsanalysen uden at opstille ligningerne (1) og (2). Men det viser sig altså også som en konsekvens af dimensionsanalysen.

Opgaver som denne, der lægger op til besvarelser på flere måder og på flere niveauer, er en god ting i breddeopgavegenren. Vi foretrækker at komme svagere og

stærkere studerende samtidigt i møde herved, fremfor ved den traditionelle opbygning af eksamensopgaver med hjælpespørgsmål undervejs til den endelige opgaveløsning.

Det er ved løsningen af opgaven forudsat, at planeten er sfærisk. Men en roterende planet vil være fladtrykt på grund af centrifugalkræfterne. En gennemgang af problemet for en fladtrykt planet er omfattende. Det kunne være en udfordring for et projektarbejde, men kan ikke fungere som emne for en breddeopgave. Dog kan vi ved dimensionsanalyse komme et stykke af vejen. Hvis vi kalder planetens radier ved polerne og ved ækvator for henholdsvis  $T$  og  $R$  – i grænsesituationen for sprængning – giver dimensionsanalysen:

$$\omega_{kr} = f\left(\frac{T}{R}\right) \sqrt{G\rho}, \quad (11)$$

hvor  $f$  er en ukendt funktion af  $T/R$ . Den kritiske værdi af  $\omega$  er altså igen uafhængig af planetens størrelse, men den afhænger af dens form ved den kritiske værdi af  $\omega$ . Både ligning (3) og (11) er udregnet under forudsætning af, at planetens materiale er som fx en bunke grus, en væske eller en gas, dvs. et materiale uden stærk intern sammenhængskraft i forhold til gravitationskræfterne.

### Breddeopgave 80. Bobler

Til næste nummer af KVANT stiller jeg denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen januar 2018).

*En vandtank har fået skruet låget lufttæt fast efter at være blevet delvist fyldt med vand. Ved et uheld slås der et hul i bunden af tanken. Hvor meget vand løber ud af tanken, før der begynder at boble luft ind i den? Begrund svaret.*

**PFEIFFER VACUUM**

## Vacuum pumper



**To-trins olielamelpumper**  
**Promotionpris fra DKK 8.000**

Tlf. 3166 8708  
Lars.Scholte@pfeiffer-vacuum.dk  
www.pfeiffer-vacuum.com