# Bobler – breddeopgave 80 med didaktisk kommentar

*Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.*

*Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.*

Her bringes løsning og kommentar til breddeopgave nr. 80 i rækken her i KVANT:

**Bobler**

*En vandtank har fået skruet låget lufttæt fast efter at være blevet delvist fyldt med vand. Ved et uheld slås der et hul i bunden af tanken. Hvor meget vand løber ud af tanken, før der begynder at boble luft ind i den? Begrund svaret.*

**Løsning**

Som på figuren kalder vi startværdien af højden af luftlommen $h_l$, startværdien af højden af vandoverfladen $h_v$, startværdien af trykket i luftlommen og uden for beholderen $P_u$, sænkningen af vandoverfladen, når den første luftboble bobler op i flasken, for $\Delta h$, og det tryk, der da er i luftlommen, for $P_{\Delta h}$. Vandets massefylde kalder vi $\rho$ og tyngdefeltstyrken $g$.

Hvis hullet i bunden af beholderen er tilstrækkeligt lille, kan vi antage, at udvidelsen af luftlommen sker langsomt og isotermt i overensstemmelse med Boyles lov. For en beholder med konstant tværsnitsareal har vi:

$$P_u h_l = P_{\Delta h}(h_l + \Delta h). \tag{1}$$

Idet vi ser bort fra overfladespænding, begynder der at boble luft ind i beholderen, når trykket i vandet lige inden for hullet er faldet til samme værdi som trykket i luften uden for hullet:

$$P_{\Delta h} + \rho g(h_v - \Delta h) = P_u. \tag{2}$$

Elimineres $P_{\Delta h}$ ved kombination af ligningerne (1) og (2), fås

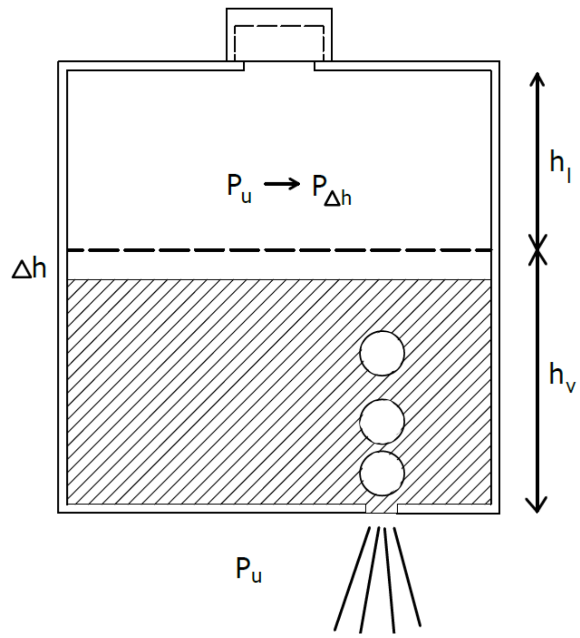
$$P_u h_l = (P_u - \rho g(h_v - \Delta h))(h_l + \Delta h), \tag{3}$$

der omskrives til:

$$\Delta h^2 + (\frac{P_u}{\rho g} + h_l - h_v)\Delta h - h_l h_v = 0 \tag{4}$$

med løsningen:

$$\Delta h = -\frac{1}{2}(\frac{P_u}{\rho g}+h_l-h_v)+\sqrt{\frac{1}{4}(\frac{P_u}{\rho g} + h_l - h_v)^2 + h_l h_v}. \tag{5}$$




**Figur 1.** Luftbobler på grund af hul i vandtank.

Svaret på opgaven er derfor, at der er løbet et volumen vand ud af beholderen givet ved tværsnitsarealet af beholderen ganget med $\Delta h$, før der begynder at boble luft ind i den.

Hvis $h_l$ går imod 0, ses $\Delta h$ at gå imod 0. Det hænger sammen med, at undertrykket i den indespærrede luft øges hurtigt med øgningen af $\Delta h$, når $h_l$ er lille, jævnfør ligning (1). Størrelsen $\Delta h$ ses også at gå imod 0, når $h_v$ går imod 0. Det hænger sammen med, at vandsøjletrykket på boblerne går imod 0 i denne grænse. Ligning (5) virker rimelig i begge grænser.

**Kommentar**

Selvom vi har set bort fra overfladespænding, lever udtrykket for $\Delta h$ i ligning (5) ikke helt op til Einsteins fysikerprogramerklæring: "Make everything as simple as possible, but not simpler". Medmindre der tænkes på vandtanke af husstørrelse, er leddet $P_u/\rho g \approx 1$ atm/(1 atm/10 m) = 10 m stort i forhold til $h_l$ og $h_v$. For indendørs vandtanke kan ligning (5), omformet til

$$\Delta h = \frac{1}{2}(\frac{P_u}{\rho g}+h_l-h_v)\left(-1+\sqrt{1 + \frac{4h_l h_v}{(\frac{P_u}{\rho g} + h_l - h_v)^2}}\right). \tag{6}$$

rækkeudvikles efter argumentet $\frac{4h_l h_v}{(\frac{P_u}{\rho g}+h_l-h_v)^2} \ll 1$ med det enklere og mere overskuelige resultat:

$$\Delta h \approx \frac{h_l h_v}{\frac{P_u}{\rho g} + h_l - h_v} \approx \frac{h_l h_v \rho g}{P_u}. \qquad (7)$$

Det er en pointe, at dette resultat kunne være opnået mere direkte uden omvejen omkring ligning (5) ved at approksimere fra begyndelsen, hvis vi indskrænker os til at udtale os om indendørs vandtanke. Samtidigt kan vi opnå et resultat, der ikke er indskrænket til at gælde for så små huller i tanken, at udvidelsen af luftlommen sker isotermt.

Vi erstatter ligning (1) med

$$P_u h_l^\gamma = P_{\Delta h}(h_l + \Delta h)^\gamma, \qquad (8)$$

hvor $\gamma = 1$ svarer til den isoterme grænse (små huller), og $\gamma = 7/5$ svarer til den adiabatiske grænse (store huller), idet luften består af diatomige molekyler. Efter omformning til $P_{\Delta h} = P_u(1+\Delta h/h_l)^{-\gamma}$, rækkeudvikling heraf efter $\Delta h/h_l \ll 1$ til $P_{\Delta h} = P_u(1-\gamma\Delta h/h_l)$, og indsættelse i ligning (2) med resultatet $\rho g h_v = \Delta h(\rho g + \gamma P_u/h_l)$, fås, idet $\rho g \ll P_u/h_l$:

$$\Delta h \approx \frac{h_l h_v \rho g}{P_u \gamma}. \qquad (9)$$

Dette resultat dækker flere situationer end resultatet i ligning (7), og vi er nået frem til det ved enklere regninger. Moralen synes at være, at det, for at bevare overblikket og gøre sagen så simpel som mulig, betaler sig at approksimere så hurtigt som muligt. Tænk først fysisk, så matematisk – ikke omvendt.

Men der findes også eksempler, der peger på den modsatte morale: Præcisér sagen så eksakt og matematisk som muligt, og overvej fysisk begrundede forenklinger til sidst.

Breddeopgaven i KVANT oktober 2017 handlede om, hvornår en dug, et tov eller lignende rutsjer ned af bordet, som dugen m.m. ligger på tværs af med ulige lange nedhæng til to modstående sider. Umiddelbart kunne man forestille sig, at det sker, når forskellen mellem tyngdekræfterne på de to udhæng overstiger den mulige statiske gnidningskraft imellem dugen og bordpladen. I kommentaren redegjorde jeg imidlertid matematisk for, hvordan gnidningen ved bordkanterne er afgørende på en måde, der kun gør det umiddelbare svar på opgaven tilnærmelsesvist rigtigt under specielle omstændigheder. Så moralen her var så afgjort, at det betaler sig at modellere så eksakt som muligt og først approksimere til sidst.

I kommentaren skrev jeg også, at opgaven – i modsætning til, hvad vi tænkte i udgangspunktet – var for vanskelig til at kunne bruges som breddeopgave til eksamen. Siden har jeg gennemset samlingen af breddeopgaver og fundet, at vi alligevel ved to tidligere eksamener (januar 1996 og januar 2010) har stillet opgaver svarende til den om den rutsjende dug, hvor vi åbenbart forhastet har tænkt, at der kunne ses bort fra gnidningen imod bordkanten i forhold til gnidningen imod bordpladen. Det er først tredje gang opgaven i den ene eller anden forklædning dukker op som idé, at vi behandler den med matematisk omhu. Skaden er ikke stor i forhold til de studerendes eksamen. De bliver mere bedømt på, om de kan tænke som fysikere konfronteret med eksamensopgaverne, end om de når frem til rigtige resultater. Men sagen er en god illustration af, at fysikere (opgavestillerne) ikke kun skal "make everything as simple as possible", men også skal være opmærksomme på anden del af Einstein-citatet: "but not simpler".

Martin Niss har for nylig skrevet en artikel ("What is physics problem solving competency? The views of Arnold Sommerfeld and Enrico Fermi", *Science & Education*, bind **27**, nr. 3–4, side 357–369 (2018)), hvor han karakteriserer Sommerfelds tilgang til fysisk problemløsning som en "theory first, phenomenon second"-tilgang, og Fermis tilgang som en "phenomenon first, theory second"-tilgang. Modstillingen ligner den, som jeg har forsøgt at illustrere ved at modstille løsningsstrategier for breddeopgaven her om bobler og breddeopgaven om den rutsjende dug i KVANT-nummeret fra oktober 2017, idet der med "theory" tænkes på en matematisk formuleret ramme for problemet under behandling.

Breddeopgavegenren lægger sig tæt op af Fermi-udgaven af fysisk problemløsning. Men overordnet er moralen, at man, for at kunne tænke som fysiker, alt efter omstændighederne skal kunne tilgå problemer både på Fermi-måden og på Sommerfeld-måden. Breddekurset er derfor kun en del af uddannelsen til fysiker.

**Breddeopgave 81. Gnidning, arbejde og varme**

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningerne til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen januar 2017, nr. 81 i rækken her i KVANT):

*En stor kælk med et lad står stille på en spejlglat tilfrosset sø. Kælken sættes i bevægelse, fordi en postsæk kastes ud på ladet, hvor den bremses ned i forhold til ladet på grund af gnidning. Hvor langt har kælken flyttet sig, når postsækken ligger stille i forhold til kælken? Begrund svaret.*

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af KVANT.

# Korrektion af korrektion af korrektion

De manglende minus-tegn i forrige nummer af KVANT betød desværre også, at korrektionen til korrektionen til artiklen "G-2-eksperimentet – den mest nøjagtige test af kvanteelektrodynamikken" blev forkert. Vi forsøger derfor endnu engang med formlen for størrelsen af impulsvektoren:

$$\sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m^2c^2}.$$