Standardmodellen for partikelfysik og ikke-kommutativ geometri

Af Jesper Møller Grimstrup

Ikke-kommutativ geometri er et moderne forskningsfelt, der kombinerer avanceret matematik med partikelfysik. I denne artikel ser vi på en ny formulering af standardmodellen for partikelfysik, hvor det ved hjælp af ikke-kommutativ geometri er muligt at se standardmodellen som en integreret del af en ren gravitationel teori. Dette rejser en lang række spørgsmål og peger muligvis i retningen af en teori for kvantegravitation.

Den moderne, teoretiske højenergifysik kan grundlæggende set betragtes som et puslespil bestående af tre brikker: *kvantemekanikken, Einsteins almene relativitetsteori og standardmodellen for partikelfysik*. Målet er at få de tre brikker til at passe sammen, så vi kan se, hvad det er for et billede, puslespillet skjuler.

De to første brikker, kvantemekanikken og almen relativitetsteori, blev som bekendt opdaget i begyndelsen af det tyvende århundrede, og i dag, 100 år senere, er problemet med at finde en teori, der forener de to, stadig uløst. De metoder, som vi normalt anvender, når vi vil opgradere en klassisk teori til en kvanteteori, løber ind i problemer, når vi forsøger at anvende dem på tyngdekraften. Efter mange årtiers forskning ved vi stadig ikke, hvordan man skal formulere en kvanteteori for tyngdekraften. Så de to første brikker passer ikke sammen.

Den tredje brik, standardmodellen for partikelfysik, beskriver det dybeste lag af virkeligheden, som det indtil nu er lykkedes os at nå eksperimentelt. Standardmodellen er en matematisk teori, der beskriver de elektrosvage og -stærke kernekræfters vekselvirkning med elementarpartikler såsom kvarker og leptoner samt den såkaldte Higgs-mekanisme, der giver partiklerne deres masse.

Standardmodellen, der er en kvantefeltteori, har en matematisk struktur, der på den ene side ser næsten tilfældig ud – den indeholder en række matematiske detaljer, der tilsyneladende lige så godt kunne have været valgt anderledes – men når man ser nærmere efter, opdager man, at dens struktur tilsyneladende er alt andet end tilfældig. Standardmodellen ligner et spørgsmål, der har et svar. Så den tredje brik i vores puslespil ser altså mystisk ud.

Det vil sige, at vi i dag står med to grundlæggende spørgsmål, som vi gerne vil have svar på:

1. Findes der en kvanteteori for tyngdekraften?
2. Hvorfor ser standardmodellen ud, som den gør?

Afstanden mellem to punkter

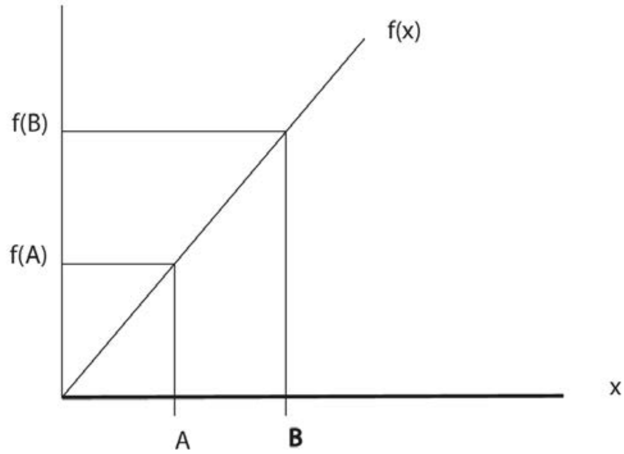
Den franske matematiker og Fields-medaljemodtager Alain Connes har i samarbejde med fysikeren Ali Chamseddine udviklet en ny tilgang til, hvordan de tre fundamentale brikker i moderne, teoretisk fysik skal lægges, og den tilgang har fået navnet *ikke-kommutativ geometri* [1-3].

Ikke-kommutativ geometri handler, som navnet røber, om geometri. Så lad os begynde med at se på almindelig geometri, eller det, vi kalder riemannsk geometri, hvilket er den matematiske begrebsramme, som Einsteins relativitetsteori er formuleret indenfor.

Grundlæggende set handler geometri om afstanden mellem punkter i et rum, så lad os begynde med et rum og se på dets geometri. Normalt formulerer vi et rums geometri med det, man kalder en *metrik*, hvilket er et felt, der til hvert punkt i rummet tilordner en række tal, der fortæller os noget om geometrien i det punkt.

Tænk på en lige linje. Når vi vil måle afstanden mellem to punkter A og B på linjen, tager vi en lineal frem og placerer den på linjen og aflæser afstanden. Linealen er her det ækvivalente til en metrik. Metrikken er så at sige en generaliseret lineal, som vi bruger, når rummet er mere kompliceret og har en ikke-triviel geometri.

Einsteins almene relativitetsteori, der grundlæggende set handler om, at rum og tid har en ikke-triviel geometri, der er givet ved materien i rummet, er netop formuleret ved hjælp af et metrisk felt. Einsteins feltligninger fortæller os, hvordan krumningen af det metriske felt hænger sammen med energien og impulsen af stoffet i rummet.



Figur 1. Afstanden mellem punkterne A og B er identisk med afstanden mellem $f(A)$ og $f(B)$, hvis funktionen f har hældning præcis lig 1. Denne noget trivielle observation er startpunktet for ikke-kommutativ geometri, der udvider Gelfand-Naimarks dualitet mellem kompakte Hausdorff-rum og kommutative C^*-algebraer til en dualitet mellem spektrale tripler og spin-geometrier.

Men lad os vende tilbage til vores to punkter A og B på den lige linje. Jeg vil nu gerne foreslå en anden måde at måle afstanden mellem dem på. Det, som jeg gerne vil gøre, er i stedet at vælge en funktion på den lige linje og så aflæse funktionens værdier i de to punkter og trække dem fra hinanden. Idéen er, at det skal give os en afstand mellem de to punkter på den lige linje.

For at det skal give mening, må vi naturligvis indskrænke vores valg af en funktion. Hvis vi for eksempel vælger en funktion, der har en gradient eller hældning, der er præcist lig en overalt på linjen, så er det klart, at når vi trækker funktionens værdier i punkterne A og B fra hinanden, vil det give os den korrekte afstand mellem de to punkter (se figur 1).

Ikke-kommutativ geometri

Lad os nu prøve at generalisere denne anden metode til at måle afstande på til et generelt rum med en mere kompliceret geometri. Det kan for eksempel være et tredimensionalt rum. Så vi følger proceduren fra før og vælger en funktion på dette rum. For at vi kan bruge funktionen til at give os en afstand, har vi brug for en metode til at sikre os, at vores funktion har, hvad der svarer til en gradient, der er lig en[1]. Måden at gøre det på er at introducere en såkaldt *Dirac-operator*, hvilket er en matematisk størrelse, der giver os gradienten af funktioner på vores rum. Dirac-operatoren er kendt fra Dirac-ligningen, som beskriver fermioner.

Vi ser altså, at når vi generaliserer den anden metode til at måle afstande på, ender vi med et setup, hvor vi har funktioner på rummet kombineret med en Dirac-operator, der giver os gradienter af funktioner. Disse to komponenter har imidlertid brug for en tredje komponent, hvilket er et såkaldt Hilbert-rum, der groft sagt er et sted, hvor vi kan evaluere forskellen på forskellige funktioner. Hilbert-rummet er så at sige det sted, hvor funktionerne og Dirac-operatorerne "lever". Til slut arrangerer vi vores funktioner i det, man kalder en algebra, hvilket er et elementært, matematisk setup, der involverer addition og multiplikation.

For at opsummere: ved at generalisere den anden metode til at måle afstande på, får vi en samling af tre komponenter: 1) en algebra med funktioner på vores rum, 2) en Dirac-operator og 3) et Hilbert-rum. Dette er, hvad man kalder et *spektralt triple*.

Nu kan man imidlertid løfte denne anden metode op på et mere abstrakt niveau. Det vil sige, at vi kan *glemme alt om selve rummet* og bare betragte det spektrale triple som et abstrakt objekt, der opfylder et sæt matematiske regler eller aksiomer. Så vi har altså en abstrakt algebra, der vekselvirker med en abstrakt Dirac-operator, og hvor det hele lever i et Hilbert-rum.

I 2008 beviste Alain Connes, at dette setup er *ækvivalent* til det første setup, hvor vi har et metrisk felt. Det såkaldte rekonstruktionsteorem siger, at det ikke gør nogen forskel, hvilket setup, vi vælger, da de begge to svarer til den samme geometriske struktur.

Det er vigtigt her at lægge mærke til, at når vi arbejder med Connes' geometriske formalisme, så er selve rummet – *altså punkterne* – en sekundær størrelse. Det kan udledes af algebraen via et teorem bevist af Gelfand og Naimark i 1943 [4]. Samtidigt er afstanden mellem punkterne kodet ind i vores Dirac-operator. Så Dirac-operatoren – den størrelse, der giver os gradienten – svarer her til metrikken i den riemannske geometri.

Læg også mærke til, at sproget, som benyttes her – operatorer og Hilbert-rum – er det samme matematiske sprog, som vi kender fra kvantemekanikken. Det betyder imidlertid ikke, at Connes' spektrale tripler er kvantemekaniske; det her handler om geometri og er i sit udgangspunkt klassisk.

Så disse to metoder til at formulere en geometri på er altså ækvivalente. Men der er en meget vigtig forskel på de to formalismer, og den forskel er, hvad der gør det her dybt interessant.

Nøglen til at forstå, hvor de to metoder er forskellige, er algebraen med funktionerne. Jeg har allerede nævnt, at en algebra er en samling elementer, som man kan addere og multiplicere. Tal danner for eksempel en algebra, og det samme gør funktioner på et rum. Man kan addere og multiplicere to tal for at få et tredje tal, og man kan addere og multiplicere to funktioner for at få en tredje funktion. Og læg mærke til, at det ingen forskel gør, i hvilken rækkefølge man gør dette. To gange tre er det samme som tre gange to; vi siger, at tal *kommuterer*.

Nu viser det sig imidlertid, at de matematiske regler – aksiomerne – som et spektralt triple skal opfylde for at give os en geometri, ikke afhænger af, om algebraen af funktioner er kommutativ. Aksiomerne kan uden videre generaliseres til også at gælde for algebraer, der *ikke* kommuterer. Altså algebraer, hvor det faktisk betyder noget, i hvilken rækkefølge man multiplicerer dets elementer. Det kalder man *ikke-kommutative algebraer*.

Og nu er vi endelig nået frem til det, man kalder ikke-kommutativ geometri. En ikke-kommutativ geometri er simpelthen givet ved et spektralt triple, der involverer en ikke-kommutativ algebra.

Vi kender selvfølgelig til ikke-kommutative algebraer fra kvantemekanikken, hvor for eksempel positions- og impulsoperatorerne ikke kommuterer, hvilket fører os til Heisenbergs usikkerhedsrelation. Og vi ser nu, at en formalisme, der for kommutative algebraer er ækvivalent til riemannsk geometri, har en helt naturlig generalisation, der involverer den type algebraer.

Og det er her, at vores fortællinger for alvor bliver interessante. Pointen er, at denne generalisering åbner en dør til en helt ny verden af eksotiske, geometriske rum. Og det viser sig – meget overraskende – at standardmodellen for partikelfysik koblet til Einsteins relativitetsteori giver os et eksempel på netop sådan en geometri.

En næsten-kommutativ geometri

For at få en bedre forståelse af, hvordan standardmodellen passer ind i formalismen med spektrale tripler, starter vi med at betragte et meget simpelt eksempel på en ikke-kommutativ algebra, nemlig en algebra givet ved rotationer i et tredimensionalt rum. Vi kan rotere rundt om de tre akser, og vi kan kombinere to rotationer til en tredje, hvilket vil sige, at vi kan multiplicere dem. Denne multiplikation er ikke-kommutativ, det betyder

[1] Den præcise betydning af dette er givet ved Connes' såkaldte afstandsformel.

noget i hvilken rækkefølge, vi udfører rotationerne, og derfor vil den algebra, som vi bygger ud fra sådanne rotationer, være ikke-kommutativ. Det giver os det, man kalder en matrix-algebra.

Nu kan man kombinere en matrix-algebra med den algebra, som jeg allerede har talt om, nemlig algebraen af funktioner på et rum, og når vi gør det, får vi det, man kalder en *næsten-kommutativ* algebra.

En næsten-kommutativ algebra er meget tæt på det algebraiske setup, som svarer til Einsteins almene relativitetsteori, altså et setup baseret udelukkende på funktionerne på rummet. Det eneste, vi har gjort, er at lægge en smule ikke-kommutativitet til i form af en matrix-algebra.

Og det er denne type algebra, der fører os til standardmodellen for partikelfysik. Hvis vi vælger den rigtige type matrix-algebra og drejer på alle de matematiske håndtag i maskineriet for ikke-kommutativ geometri, så er det, der kommer ud i den anden ende, netop standardmodellen koblet til almen relativitetsteori.

Med Connes' matematiske maskineri har vi altså fået en fuldstændig ny måde at forstå standardmodellen på. Ting, der i den gamle formulering så tilfældige ud, giver pludselig perfekt mening. Det bedste eksempel er Higgs-mekanismen, som i den almindelige formulering af standardmodellen er et element, som vi ved, skal være der, men som fra et matematisk synspunkt ser mærkeligt ud. I Connes' formulering er Higgs-mekanismen en integreret del af den sektor, der indeholder de tre fundamentale kræfter (de elektromagnetiske, de svage og de stærke kernekræfter). Higgs-sektoren er simpelthen en nødvendighed i Connes' formulering.

Hvad betyder det her?

Der er en række vigtige detaljer, som man kunne skrive om her. Der er nogle vigtige forbehold – for eksempel det faktum, at Connes' formulering først rigtig fungerer i det euclidiske setup, altså når tidsretningen er *kompleks* – og andre vigtige teknikaliteter. Men selvom alle disse detaljer er vigtige, ja essentielle, så tror jeg, at det er bedst i første omgang at lade dem ligge og i stedet se på det store billede. Hvad fortæller Connes' arbejde os, og i hvilken retning peger det?

Der er to pointer, som jeg gerne vil fremhæve:

1. Den ikke-kommutative formulering af standardmodellen er en ren *gravitationel* formulering. Standardmodellen plus almen relativitetsteori er her kombineret til en enkel gravitationel teori over et underligt, abstrakt rum. Dette er efter min vurdering dybt interessant.

2. Det faktum, at dette er muligt, er ikke trivielt. Ikke alle modeller passer ind i maskineriet for ikke-kommutativ geometri, hvilket betyder, at standardmodellen er *speciel*. Hvis den havde set anderledes ud, ville Connes' formulering ikke fungere [5].

Dette rejser to centrale spørgsmål:

1. Hvor stammer den næsten-kommutative struktur fra? Hvorfor netop dén struktur? Hvad ligger der bag netop dette matematiske valg? Efter min mening er dette et af de mest interessante spørgsmål i moderne, teoretisk fysik.

2. Hvilken rolle spiller kvantefeltteori i alt dette?

Det andet spørgsmål kræver en forklaring. Standardmodellen for partikelfysik er som nævnt en kvantefeltteori. Men Connes' formulering af standardmodellen fanger kun den *klassiske* del af modellen. Den ikke-kommutative formulering involverer *ikke* kvanteaspektet [1].

Det er ikke svært at forstå, hvorfor det nødvendigvis må være sådan. Da den ikke-kommutative formulering af standardmodellen essentielt er en gravitationel formulering, så ville den, hvis den skulle involvere kvantiserede felter, også involvere en eller anden form for kvantegravitation. Og det er noget, som vi ikke ved, hvordan man gør. Så det, Chamseddine og Connes i stedet gør, er at anvende kvantiseringsproceduren i et sekundært skridt og kun på selve standardmodellen – ikke til gravitation.

Dette er tydeligvis ikke tilfredsstillende. Hvis denne elegante formulering skal være fundamental, så må den nødvendigvis involvere kvanteteorien som et primært element og ikke som en mere eller mindre tilfældig tilføjelse. Derfor mit spørgsmål: Hvilken rolle spiller kvanteteorien i den ikke-kommutative formulering af standardmodellen?

Det er en besynderlig situation. På den ene hånd har vi den gamle formulering, hvor standardmodellen er en kvanteteori, og hvor gravitation er en separat størrelse, og på den anden hånd har vi den nye formulering, hvor standardmodellen og gravitation på et klassisk niveau er forenede, men hvor kvanteaspektet mangler. Hvad betyder alt det her? Det er der ingen, der ved. Connes' arbejde har rodet brikkerne i vores puslespil rundt og sat dem sammen på en ny måde. Men det er stadigvæk ikke klart, hvad det er for et billede, puslespillet skjuler.

Lad mig afslutte med at give læseren mit eget synspunkt. Jeg tror, at Chamseddines og Connes' formulering er et vejskilt. Jeg tror, at det peger os i retningen af en mere fundamental teori, og jeg tror, at vores opgave er at læse dette vejskilt meget grundigt.

Det minder om Maxwells ligninger, der som bekendt har to ækvivalente formuleringer: én formulering med elektriske og magnetiske felter og én med et såkaldt gauge-felt. De to formuleringer er ækvivalente, men når man anvender formuleringen med gauge-feltet ser man, at Maxwells ligninger peger frem mod Einsteins specielle relativitetsteori og mod de såkaldte ikke-abelske gauge-teorier, som vi i dag ved, beskriver de svage og stærke kernekræfter (og faktisk også almen relativitetsteori). Så når man har ækvivalente formuleringer, kan det ske, at en af dem tydeligst peger i retningen af mere fundamentale teorier.

Efter min mening peger Connes' arbejde os i retningen af en teori for kvantegravitation, der skal gøre to ting: for det første skal den involvere maskineriet fra ikke-kommutativ geometri og for det andet skal den producere den matrix-algebra, som vi havde brug for for at nå frem til standardmodellen, i en klassisk grænse. Et korollar til det synspunkt er, at kvantefeltteorien, som vi kender den, må være en lavenergigrænse af en kvanteteori for gravitation.

Det var sådanne overvejelser, der oprindeligt motiverede matematikeren Johannes Aastrup og mig selv til at begynde vores arbejde på vores egen tilgang til en teori for kvantegravitation. I vores arbejde har vi foreslået et setup, der essentielt er rent geometrisk – altså gravitationelt – men som involverer en mulighed for at opnå en næsten-kommutativ geometri i en klassisk grænse. Vores idé er, at når man betragter matematikken, der beskriver, hvordan objekter flyttes rundt i et tredimensionalt rum, så lander man automatisk i et setup, der kombinerer Connes' matematiske formalisme med en central ingrediens fra en teori for kvantegravitation. Det vil sige, at hvis man baserer en fundamental teori på en algebra, der indeholder information om, hvordan ting flyttes rundt i et rum – altså egenskaber ved selve rummet – så har man muligvis noget, der både giver os en ny ansatz til en teori for kvantegravitation og samtidigt involverer en mulig forbindelse til standardmodellen for partikelfysik. Alt dette kan man læse mere om i min bog *"Shell Beach – jagten på den endelige teori"* [6], der netop nu udkommer på forlaget Montagne, og hvor jeg også fortæller om mine oplevelser i maskinrummet af den moderne teoretiske og matematiske fysik.

Litteratur

[1] Alain Connes (1996) "Gravity coupled with matter and foundation of noncommutative geometry", *Commun.Math.Phys.*, bind **182**, side 15–176.

[2] Alain Connes og Matilde Marcolli (2006) "A Walk in the noncommutative garden", *Archive: math/0601054*.

[3] Thomas Schucker (2005) "Forces from Connes' geometry", *Lect.Notes Phys.*, bind **659**, side 285–350.

[4] I. M. Gelfand og M. A. Naimark (1943) "On the imbedding of normed rings into the ring of operators on a Hilbert space", *Math. Sbornik.*, bind **12**, nr. 2), side 197–217.

[5] Bruno Iochum, Thomas Schucker og Christoph Stephan (2004) "On a classification of irreducible almost commutative geometries", *J.Math.Phys.*, bind **45**, side 5003–5041.

[6] Jesper Møller Grimstrup (2019) "Shell Beach – jagten på den endelige teori", Forlaget Montagne.

[7] Ryszard Nest (2010) "Ikke-kommutativ geometri", *Kvant*, bind **21**, nr. 4, side 24–26.

[8] Alain Connes (2013) "On the spectral characterization of manifolds", *J.Noncommut.Geom.*, bind **7**, side 1–82.

Jesper Møller Grimstrup forsvarede sin ph.d.-titel ved Wiens Tekniske Universitet i 2002 og har i en årrække været ansat blandt andet ved Niels Bohr Institutet og NORDITA i København. Han er en aktiv forsker inden for forskningsfelter såsom ikke-kommutativ geometri og kvantegravitation. I dag arbejder Jesper Grimstrup som freelance forsker og forfatter. Se mere på hjemmesiden www.jespergrimstrup.org.

Temperaturen og den nye kelvin

Finn Berg Rasmussen, Niels Bohr Instituttet, Københavns Universitet og KVANT

Fra 13. til 16. november 2018 har Generalkonferencen for Mål og Vægt holdt sit 26. møde. Her godkendtes nye definitioner af fire af SI-systemets grundenheder, kilogram, ampère, kelvin og mol. De sidste forberedelser til denne ændring har stået på siden 2011, hvor den 24. Generalkonference formulerede krav til målenøjagtighed og reproducerbarhed som forudsætning for nye definitioner.

De nye definitioner

Hver af de oprindelige internationale enheder var baseret på en størrelse af samme slags: Enheden for masse – et kilogramlod – var selv en masse, enheden for længde var en meterstok, altså en længde, enheden for temperatur blev fastlagt ved et temperaturinterval osv. Med udviklingen af stadigt stigende nøjagtighed og pålidelighed af målemetoder er det blevet muligt at måle og reproducere værdier af nogle af naturkonstanterne mere præcist, end de relevante måleenheder kan realiseres. Når dette indtræffer, bliver det rimeligt at opdatere enhedernes definition. I de officielle papirer fra BIPM (Bureau International des Poids et Mesures) understreges det, at dette års nye definitioner kun har betydning i tilfælde, hvor der kræves helt ekstrem nøjagtighed. I almindelig målepraksis vil man ikke mærke noget til ændringerne.

Sekundet blev i 1968 defineret gennem en nøje specificeret overgangsfrekvens i atomer af cæsium-133. *Meteren* har siden 1983 været defineret som den afstand, lyset tilbagelægger i en vis tid, det vil sige, at lyshastigheden er blevet tildelt en bestemt værdi. De nye definitioner af yderligere fire af de syv grundenheder går videre ad denne vej, idet fire relevante naturkonstanter defineres med hver sin bestemte værdi. Det siger sig selv, at disse værdier er de nøjagtigste, man indtil nu har kunnet bestemme og reproducere mellem forskellige standardlaboratorier [1] og ved forskellige metoder på grundlag af de eksisterende enheder.

Mens man let kan forestille sig et særligt fint kilogramlod som international masseenhed, er det betydeligt sværere at se, at det nu kan erstattes af en defineret værdi af Plancks konstant (i kombination med meteren og sekundet). Det eksperimentelle grundlag