Ståltrådsstrækning
- breddeopgave 83 og 84 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsninger og kommentar til opgaverne fra forrige nummer samt nye opgaver. Opgaverne i sidste nummer af Kvant var disse breddeopgaver (nr. 83 og 84 i rækken her i Kvant):

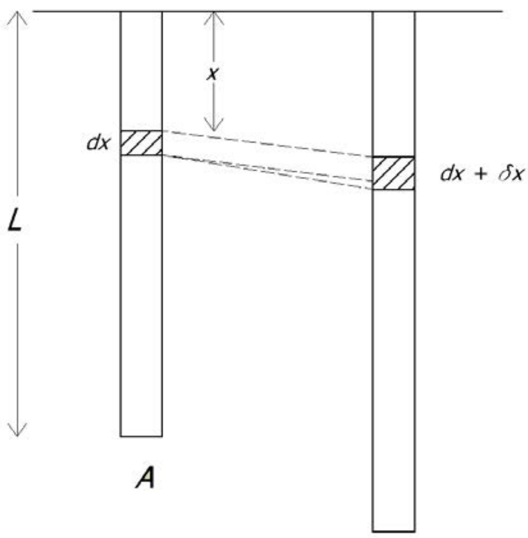
Breddeopgave 83 og 84. Ståltrådsstrækning

Hvor meget strækkes en stang under sin egen vægt, når den hænger lodret ned fra den ene ende?

En ståltråd svinges rundt i et vandret plan. Hvor meget forlænges ståltråden af at blive svinget rundt? Begrund svaret.

Løsninger

Lad os starte med stangen, der strækkes under sin egen vægt. For at analysere sagen nærmere er vi nødt til at betragte stangen som sammensat af små infinitesimale stykker, som det er vist på figur 1.



Figur 1. Henholdsvis ubelastet stang og stangen strakt under sin egen vægt.

Vi kalder stangens ubelastede længde for L og dens tværsnitsareal for A. Det infinitesimale stykke af den ubelastede stang, dx, i afstanden x fra dens øvre ende, er forøget med længden δx på grund af trækspændingen i stangen i afstanden x forårsaget af tyngdekraften F på stykket af stangen under det infinitesimale stykke. Vi kalder stangens masse for M og tyngdefeltstyrken for g og har så:

$$F = Mg\frac{L-x}{L} \tag{1}$$

Definitionen på Youngs modul Y er

$$\frac{F}{A} = Y\frac{\Delta l}{l}, \tag{2}$$

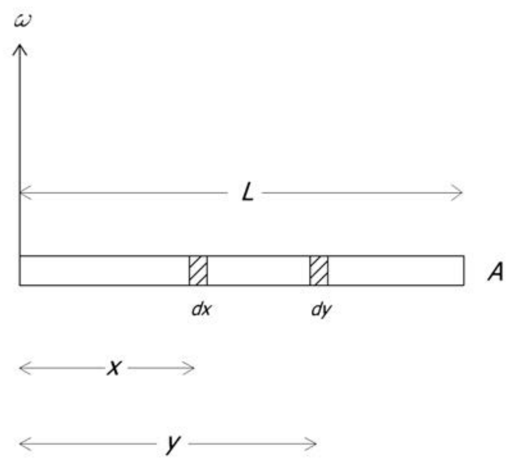
hvor $\Delta l/l$ er den relative forlængelse af fx en stang, og F/A er spændingen, som stangen er udsat for. Oversat til det infinitesimale stykke dx udsat for trækspændingen givet ved ligning (1), har vi:

$$\frac{\delta x}{dx} = \frac{Mg}{YA}(1-\frac{x}{L}). \tag{3}$$

Den samlede strækning af stangen under dens egen vægt, ΔL, fås da ved integration af δx-bidragene fra de forskellige værdier af x:

$$\Delta L = \int_0^L \delta x = \frac{Mg}{YA}\int_0^L (1-\frac{x}{L})dx = \frac{MgL}{2YA}. \tag{4}$$

Strækningen af ståltråden, der svinges rundt i et vandret plan (med vinkelfrekvensen ω), er et analogt problem, bortset fra udregningen af F. Vi vil analysere problemet i det medroterende system. Ligning (1) ses ikke at kunne benyttes for F, da kraftfeltet, der forårsager strækningen, nu ikke er homogent. Udregningen af den samlede centrifugalkraft på stykket uden for det infinitesimale dx-stykke, og dermed trækspændingen i x, kræver en integration.



Figur 2. Strækning af ståltråd, som svinges rundt i et vandret plan.

Med betegnelserne i figur 2 fås

$$dF = \frac{My\omega^2 dy}{L}, \tag{5}$$

så

$$F = \int_{y=x}^{y=L} dF = \frac{M\omega^2(L^2 - x^2)}{2L} \tag{6}$$

i stedet for F, givet ved ligning (1). Derfor fås

$$\frac{\delta x}{dx} = \frac{M\omega^2(L^2 - x^2)}{2AYL} \tag{7}$$

i stedet for ligning (3). Og

$$\Delta L = \int_{x=0}^{x=L} \delta x = \frac{M\omega^2 L^2}{3YA} \tag{8}$$

i stedet for ligning (4). Svaret på opgaven om strækningen af ståltråden, der svinges rundt, fremgår således af svaret på opgaven om strækningen af stangen, der hænger i tyngdefeltet, ikke blot ved at erstatte g med $L\omega^2$, men også ved at erstatte 1/2 med 1/3 på grund af inhomogeniteten af centrifugalfeltet.

Kommentar

Ved kurserne Fysisk problemløsning I og Fysisk problemløsning II på RUC, som tilsammen er den nutidige udgave af det tidligere Breddekursus, diskuterer både lærere og studerende, hvad der skal til for at svare på breddeopgaverne (det kalder vi dem stadig). Der er enighed om, at løsningen af breddeopgaver typisk foregår i to trin. Det første trin består af en formalisering af det stillede problem. Det andet trin består herefter i at løse det fremkomne formaliserede problem. Og der er enighed om, at det oftest er det første trin, der volder de største vanskeligheder. Formaliseringen består i varierende blandinger af "fysificering"og "matematificering". Ved fysificeringen placeres breddeopgaveproblemet, formuleret i dagligdags sprog, i fysik-kontekster. Hvad drejer sagen sig essentielt om? Hvilken slags fysik skal i spil? Ved matematificeringen placeres problemet i matematik-kontekster. Hvilke er de uafhængige variable, de afhængige variable og parametrene i problemet? Hvilken slags matematik skal i spil? I en nyere artikel[1] er formaliseringsproblemet behandlet i større detalje ved gennemgang af fire breddeopgaver, som er valgt, så de repræsenterer fire forskellige måder, matematik og fysik indgår i forhold til hinanden på ved formaliseringen af opgaverne.

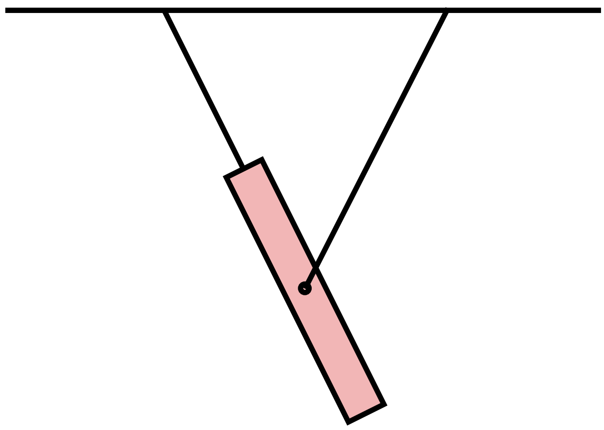
Den ene af opgaverne er den i artiklen her, om hvor meget en lodret hængende stang strækkes under sin egen vægt. Løsningen af opgaven kræver nogle indledende fysikovervejelser om belastning, jf. ligning (1), og elasticitetsmodul, jf. ligning (2). Parallelt hermed modnes idéen om, at ligning (2) skal bringes i anvendelse til udregning af infinitesimale længdeudvidelser, δx, af infinitesimale dele af stangen, dx, endende op med en integration. Det er vores vurdering, at det er denne matematificering af opgaven, der i dette tilfælde er den mest krævende del af besvarelsen.

I det hele taget er matematificeringen erfaringsmæssigt – i varierende grad – en afgørende barriere ved løsningen af breddeopgaver. Omvendt kan breddekurset, udover at være en introduktion af fysik i bredden, via sin form for problemløsningsorientering, også betragtes som en træningsbane for matematificering og matematisk problemløsning i det hele taget.

Breddeopgave 85, 86 og 87. Svingninger, opdrift og mørkt stof.

Inden næste nummer af Kvant udkommer, kan læserne overveje løsningerne til disse opgaver fra breddekurset på RUC (fra eksamen juni 2019, nr. 85, 86 og 87 i rækken her i Kvant):

En homogen stang er ophængt i to snore, som vist på figuren. Hvordan svinger stangen, hvis henholdsvis den ene og den anden snor knækker? Begrund svarene.



En spand vand, hvori der flyder en træklods, sættes på gulvet i en elevator. Hvorledes ændrer træklodsens stilling sig i forhold til vandoverfladen, når elevatoren begynder at køre? Begrund svaret.

Hypotesen om mørkt stof blev først fremsat i 1933 af Fritz Zwicky, fordi han observerede, at galakserne i en bestemt galaksehob bevægede sig, som om massetætheden i galaksehoben var omkring 400 gange større end massetætheden af det synlige stof i galaksehoben. Hvor mange gange hurtigere bevægede galakserne i galaksehoben sig, end de ville have gjort, hvis det alene var synligt stof, der bevægede dem? Begrund svaret.

Løsninger og kommentar bringes i næste nummer af Kvant.

[1] J. H. Jensen, M. Niss og U. T. Jankvist (2017) “Problem solving in the borderland between mathematics and physics”, *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, bind **48**, side 1–15.