

Hvilemasse – breddeopgave 88

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, Institut for Naturvidenskab og Miljø, Roskilde Universitet

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af Kvant var denne breddeopgave (nr. 88 i rækken her i Kvant):

Breddeopgave 88. Hvilemasse

En snurretop på en vægt vejer mere, jo hurtigere den snurrer. Hvor hurtigt skal den snurre, for at det kan måles? Begrund svaret.

Løsning

Ifølge Einsteins $E = mc^2$ ligning er et systems hvilemasse ækvivalent med dets energi i det referencesystem, hvor systemets samlede impuls er nul.

Når snurretoppen ligger stille på vægten, er dens masse $m_0 = E_0/c^2$, hvor c er lyshastigheden og E_0 den indre energi af snurretoppen, når den ikke roterer. Når snurretoppen snurrer, øges dens energi i nul-impulssystemet med $\frac{1}{2}I\omega^2$, hvor I er snurretoppens inertimoment og ω vinkelfrekvensen, den snurrer med. Størrelsesordensmæssigt er forøgelsen lig med $m_0R^2\omega^2$, hvor R angiver snurretoppens udstrækning. Snurretoppens masse er da ifølge masse-energi ækvivalensen:

$$m_\omega \approx (E_0 + m_0R^2\omega^2)/c^2. \quad (1)$$

Den relative vægtforøgelse af snurretoppen, når den snurrer, er derfor:

$$(m_\omega - m_0)/m_0 \approx (R\omega/c)^2. \quad (2)$$

Lad os antage, at vi til måling af vægtforøgelsen, kan finde en vægt, som kan måle med 8 betydende cifre. Så er den mindste vinkelfrekvens, ω_{\min} , hvor der kan måles en vægtforøgelse af snurretoppen:

$$\omega_{\min} \approx 10^{-4}c/R, \quad (3)$$

svarende til $(R\omega_{\min}/c)^2 \approx 10^{-8}$. Med $R = 30$ cm giver det $\omega_{\min} \approx 10^9$ s⁻¹.

Måling af, at snurretoppens vægt forøges, når den snurrer, ser ud til at være noget af en udfordring.

Kommentar

Både i gymnasiet og på universiteterne undervises der i sammenhængen mellem en atomkernes bindingsenergi E_{binding} og kernens massedefekt $m_{\text{defekt}} \equiv (Zm_p + Nm_n) - m_{\text{kern}}$ (Z er antallet af protoner i kernen, hver med massen m_p ; N er antallet af neutroner i kernen, hver med massen m_n):

$$E_{\text{binding}} = m_{\text{defekt}}c^2 \quad (4)$$

Ligningen udtrykker, at energien, der skal tilføres en hvilende kerne for at splitte den i henholdsvis

dens Z og N hvilende protoner og neutroner, er lig med masseforøgelsen herved gange kvadratet på lysets hastighed. Altså at masseændring og energiændring hænger sammen, når en atomkerne splittes ad i sine bestanddele.

Den samlede energi af en bevæget partikel,

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (5)$$

hvor m_0 er partiklens hvilemasse og v dens fart, sammenfattes ofte ved hjælp af den "relativistiske masse" $m = m_0/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ til $E = mc^2$. Da den således definerede relativistiske masse er proportionalitetsfaktoren imellem impuls og hastighed, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, kan begrebet, forstået således, udvides til også at inkludere fotoner og andre partikler uden hvilemasse. Her er $\mathbf{p} = E/c^2 \cdot \mathbf{c}$, og altså $m = E/c^2$, eller igen $E = mc^2$. Denne ligning bør imidlertid ikke forveksles med Einsteins ækvivalensligning mellem energi og hvilemasse med det samme udseende.

I 1906 beskrev Einstein et tankeeksperiment, hvor en foton udsendes fra den ene endevæg inden i en kasse for siden at blive absorberet i kassens anden endevæg [1]. Kassen står på et glat underlag. Kassen flytter sig derfor, medens fotonen bevæger sig fra den ene endevæg til den anden, idet summen af fotonens og kassens impuls skal være den samme før, under og efter fotonbevægelsen. Men da der ikke har været nogen ydre påvirkning, kan tyngdepunktet af det isolerede system ikke have flyttet sig. Derfor må vi gå ud fra, at der i sammenhæng med fotonens energioverførsel fra den ene endevæg til den anden også har fundet en overførsel af masse sted. Dette kvalitative ræsonnement forudsætter ikke relativitetsteori. Og ved at benytte den i forvejen kendte sammenhæng imellem impuls og energi i elektromagnetisk stråling kunne han med en tilnærmet beregning, igen uden brug af relativitetsteori, finde sammenhængen til at være $E = mc^2$.

Ved vintereksamen 2002 på breddekurset på RUC drejede en af eksamensopgaverne sig om eftervisning af Einsteins regnestykke. Opfølgende skrev jeg en breddeopgaveartikel i Kvant, hvor jeg undrede mig over, at regnestykket ikke kunne gennemføres relativistisk og uden tilnærmelser uden at løbe ind i en modstrid [2]. Kunne den specielle relativitetsteoris måske mest afgørende resultat ikke eftervises eksakt? Hvor lå fejlen? Ulrik I. Uggerhøj (UIU) kom mig til undsætning med en reference, der viste, at der principielt set ikke kan regnes eksakt på Einsteins kasse [3]. Begrebet stift legeme er eksakt set ikke af denne verden. I tilfældet Einsteins kasse kan man således ikke gå ud fra, at bevægelsen af lysafsendelsesvæggen momentant kan

forplante sig til bevægelse af den modsatte endevæg. Den anden endevæg kan tidligst registrere, at lyskvantet blev afsendt, når det når frem til den.

Undervejs til denne afklaring havde UIU og jeg en indbyrdes diskussion af Einsteins kasse problem i Kvant [4]. UIU fokuserede i farten på fotonen som massetransportør, og fandt eksakt $E = mc^2$ for sammenhængen imellem fotonens energi og dens "relativistiske masse". Men det vidste vi jo godt i forvejen. Det følger, som vist ovenfor, direkte af definitionen på relativistisk masse. Derimod fokuserede jeg med Einstein på hvilemassen, der slutteligt var blevet flyttet fra den ene væg til den anden. Og jeg opretholdt min påstand om modstrid, indtil UIU's reference og forkastelsen af begrebet stift legeme. Episoden viser, at det er vigtigt at understrege, at Einsteins berømte ligning handler om hvilemasse og ikke om relativistisk masse.

Helt generelt, altså ikke blot i sammenhæng med formel (4) og Einsteins kasse, gælder, at lysets hastighed i anden potens gange massen af et vilkårligt fysisk system i et koordinatsystem, hvori det fysiske systems samlede impuls er nul, er lig med det fysiske systems energi i koordinatsystemet. Det er den generelle betydning af Einsteins ligning $E = mc^2$. Hvilemassen er generelt et mål for energiindholdet i et isoleret system, uanset om der er tale om bindingsenergi, termisk energi, strålingsenergi eller rotationsenergi, hvis systemets samlede impuls er nul.

Selvom $E = mc^2$, forstået generelt, nok er det væsentligste resultat af den specielle relativitetsteori, lever beviset herfor en noget tilbagetrukket rolle i universiteternes indledende undervisning i speciel relativitetsteori. I 1937 i Fysisk Tidsskrift leverer Chr. Møller et bevis [5]. Det bygger på energibevarelse og impulsbevarelse for isolerede fysiske systemer og Lorentztransformationen af impuls og energi mellem et nul-impuls koordinatsystem og et koordinatsystem med konstant hastighed i forhold til det. Beviset behøvede måske ikke at være uden for rækkevidde ved den indledende universitetsundervisning.

Måske skyldes tilbageholdenheden med at levere bevis for masse-energi-ækvivalensen for alle energiformer, at beviset oprindeligt var forbundet med fødselsveer? Omfanget af masse-energi ækvivalensen stod først klart i 1908, selvom Einsteins første artikel om den specielle relativitetsteori er fra 1905. Så sent som i 1937 blev det i en artikel i Fysisk Tidsskrift, med inspiration fra slagsmålet om "arisk fysik" kontra "jødisk fysik" blandt fysikere i nazitidens Tyskland, forsøgt at skabe usikkerhed om sagen. Chr. Møllers artikel i det samme nummer af Fysisk Tidsskrift var et svar herpå.

Modsat den almindelige tilbageholdenhed forholder det sig for Eugene Hecht [6]. Han advokerer i en nylig artikel for, at det svært definerbare energibegreb i fysik, som udgangspunkt for undervisning bør forstås som hvileenergi, $E_0 = mc^2$, og bevægelsesenergi. Punktum. I stedet for at være tøvende over for tolkningen af masse som hvileenergi generelt. Det mener han, vil skabe begrebslig klarhed. Og det skal der til:

"Clearly, we have been able to successfully do physics without being overly careful about defining the foundational basics, but teaching physics without conceptual rigor is a different matter."

Selvom jeg synes, at Eugene Hecht i sin artikel giver et godt overblik over energibegrebets historie både i fysik og i fysikundervisning, deler jeg ikke det citerede synspunkt, at undervisning, til forskel fra forskning, kræver præcist definerede begreber. Tværtimod vil jeg advare imod synspunktet.

Hverken forskning eller læring i en undervisnings-situation foregår som aksiomatisk deduktive processer. Begreber udvikles og udbygges ved erfaring med deres brug i forskellige slags sammenhænge. Jo flere forskellige slags erfarede sammenhænge et begreb har vist sig produktivt i, des dybere forstås begrebet. Begreber udvikles i høj grad induktivt.

Vi har ikke undervist i det generelle bevis for $E = mc^2$ på breddekurset. I forhold hertil er opgaven om snurretoppens hvilemasse ment som en introduktion. Først når dette og andre eksempler på anvendelsen af $E = mc^2$ er forstået og erfaret, er vejen banet for den deduktivt sammenfattende forståelse af $E = mc^2$, fx gennem Chr. Møllers bevis. Først når det forstås, hvad det er, der skal bevises, kan beviset forstås.

Breddeopgave 89. Varmehjælp til naboen.

Inden næste nummer af Kvant udkommer, kan læserne overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen juni 2015, nr. 89 i rækken her i Kvant):

I et dobbelthus, bestående af to ens sammenbyggede huse ved siden af hinanden, er det ene hus i en periode ubeboet, med lukkede radiatorer. Alene ved samtidigt at måle temperaturerne, dels udendørs, dels indendørs i hvert af de to huse, kan det udregnes, hvor stor en del af varmemeforbruget i det dobbelte hus, der går til opvarmning af det ubeboede hus. Hvordan?

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af Kvant.

Litteratur

- [1] A. Einstein (1906) Das Prinzip von Erhaltung der Scherpunktsbewegung und die Trägheit der Energie, *Annalen der Physik* bind. bind **20**, side 627.
- [2] J.H. Jensen (2004) Opgavehjørnet – Relativistisk tyngdepunktsflytning, *Kvant*, bind **15**, nr. 4, side 28–30.
- [3] A.P. French (1968) Special Relativity, M. I. T Introductory Physics Series, side 27.
- [4] U.I. Uggerhøj (2005) Relativistisk tyngdepunktsforskydning, og J.H. Jensen (2005) Svar til Ulrik I. Uggerhøj, *Kvant*, bind **16**, nr. 2, side 23–25.
- [5] C. Møller (1937) Sætningen om Massens og Energiens Ækvivalens, *Fysisk Tidsskrift*, bind **35**, side 59–71.
- [6] E. Hecht (2019): Understanding energy as a subtle concept: A model for teaching and learning energy, *Am. J. Phys.*, bind **87**, side 495–503.