

# Korrespondens mellem Doppler- og Compton-effekt - breddeopgave 78 med didaktisk kommentar

Af Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

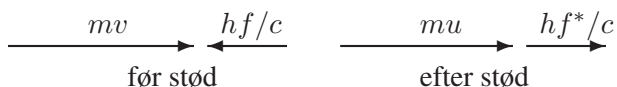
Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt en ny opgave. Opgaven i sidste nummer af KVANT var denne breddeopgave (nr. 78 i rækken her i KVANT):

## Breddeopgave 78. Korrespondens mellem Doppler- og Compton-effekten

Temperaturen på 200 millioner grader af plasmaet i fusionsreaktoren JET måles ved at undersøge plasma-partiklernes hastighedsfordeling ved hjælp af frekvensfordelingen af laserlys reflekteret fra partiklerne. Er det reflekterede lys fra elektronerne eller fra ionerne i plasmaet, der giver den bedste temperaturbestemmelse? Begrund svaret.

### Løsning

Vi vil regne på det elastiske 180°-stød antydnet på figuren:



**Figur 1.** Elastisk 180°-stød imellem en foton og en elektron/ion.

Energikvantet af laserlys  $hf$ , hvor  $h$  er Plancks konstant og  $f$  frekvensen af laserlyset, tilbagekastes af elektronen/ionen, som har massen  $m$  og hastigheden  $v$ . Herved ændres frekvensen af det tilbagekastede laserlys til  $f^*$ . Og elektronens/ionens hastighed ændres til  $u$ . Vi antager, at elektronernes og ionernes hastigheder er små i forhold til lysets hastighed.

Energibevarelsen under det elastiske stød giver:

$$\frac{1}{2}mv^2 + hf = \frac{1}{2}mu^2 + hf^*, \quad (1)$$

hvoraf fås, idet vi antager  $v - u \ll v$ :

$$h(f^* - f) = \frac{1}{2}m(v^2 - u^2) \approx \frac{1}{2}m(v - u)2v. \quad (2)$$

Impulsbevarelsen giver:

$$mv - hf/c = mu + hf^*/c, \quad (3)$$

og heraf fås, idet vi antager  $f^* - f \ll f$ :

$$m(v - u) = h(f + f^*)/c \approx h2f/c, \quad (4)$$

hvor  $c$  er lyshastigheden.

Ved indsættelse af (4) i (2) kommer vi frem til:

$$m(v - u) = h(f + f^*)/c \approx 2hf/c \quad (5)$$

eller

$$(f^* - f)/f \approx 2v/c. \quad (6)$$

Dette er tilnærmelsen til første orden af  $v/c$  for Doppler-effekten ved vinkelret lysrefleksion fra et bevæget spejl. Måske kunne vi have gættet det fra en start? Elektronen som et spejl?

For at besvare opgaven skal ligning (6) sammenholdes med, at middelværdien af bidraget til den kinetiske energi fra bevægelserne i den ene af tre mulige retninger ifølge ækvipartitionsprincippet er givet ved:

$$\langle \frac{1}{2}mv^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T, \quad (7)$$

hvor  $k_B$  er Boltzmanns konstant og  $T$  den absolutte temperatur. Fordelingen af  $v$  omkring 0 har derfor en bredde,  $\Delta v$ , givet ved:

$$\Delta v = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}. \quad (8)$$

Ifølge ligning (6) modsvares fordelingen af  $v$  af en fordeling af  $f^* - f$ . Sammenholdes ligning (8) og ligning (6) ses det, at bredden af fordelingen af  $f^* - f$  er et mål for  $\sqrt{T}$ . Det ses endvidere, at bredden af fordelingen er proportional med  $\sqrt{m^{-1}}$ . Der er derfor mere at måle på, jo mindre  $m$  er. Det reflekterede lys fra elektronerne giver derfor en nøjagtigere temperaturbestemmelse end lyset fra ionerne.

### Kommentar

Opgaven hører til i den svære ende af spektret af breddeeksamensopgaver. Vi udvælger blandt andet eksamensopgaverne med henblik på deres senere værdi i undervisningen, som i høj grad er baseret på tidligere eksamensopgaver. At der i eksamensopgavesættene forekommer opgaver af varierende sværhedsgrad, er ikke i sig selv et problem. Besvarelsen af et opgavesæt vurderes i sin helhed. Besvarelsen af de enkelte opgaver i sættet tildeles altså ikke nødvendigvis samme vægt ved den samlede bedømmelse.

Opgaven kan besvares på tre niveauer.

Det første niveau består i umiddelbart at antage gyldigheden af ligning (6) ud fra analogien til refleksionen fra et bevæget spejl og derefter sammenholde den med ligning (8).

Det andet niveau er det, der er gennemgået ovenfor under antagelserne  $v \ll c$ ,  $v - u \ll v$  og  $f^* - f \ll f$ . Det tredje niveau er at gennemregne problemet uden disse antagelser.

En eksakt relativistisk beregning giver:

$$f^* = f \frac{\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}}{\frac{2hf}{mc^2} + \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}} \quad (9)$$

i stedet for ligning (6).

I JET-tilfældet er  $hf \approx 1$  eV og  $mc^2$  for en elektron ca. 1 MeV. Ledet  $2hf/(mc^2)$  i ligning (9) er derfor i vores tilfælde forsvindende lille. I grænsen, hvor  $2hf/(mc^2)$  går imod 0, går ligning (9) imod  $f^* = f(1+v/c)/(1-v/c)$ , som er den relativistiske Doppler-formel for refleksion af en elektromagnetisk bølge fra et spejl bevæget imod bølgen. Refleksionen fra elektronen svarer derfor i JET-tilfældet til refleksionen fra et bevæget spejl.

Den typiske fart af elektronerne i JET-plasmaet kan ud fra ligning (8) vurderes til at være ca. 1/6 af lyshastigheden. Med udgangspunkt i den relativistiske Doppler-formel kan vi derfor lave tilnærmelserne  $f^* \approx f(1+v/c)(1+v/c) \approx f(1+2v/c)$ , eller  $(f^* - f)/f \approx 2v/c$ , jævnfør ligning (6). Det andet niveau for besvarelsen af opgaven bestod således af

tilnærmelsesvis rigtige regninger. Antagelserne  $v \ll c$ ,  $v - u \ll v$  og  $f^* - f \ll f$  var altså berettigede.

I grænsen  $v/c = 0$ , dvs.  $180^\circ$  elastisk fotonspredning fra en hvilende ladet partikel, giver formel (9)

$$\frac{1}{f^*} = \frac{1}{f} \left(1 + \frac{2hf}{mc^2}\right). \quad (10)$$

Eller oversat til bølgelængder af fotonerne,  $\lambda^*$  og  $\lambda$ ,  $\lambda^* - \lambda = 2h/(mc)$ , som er Compton-formlen for elastisk fotontilbagespredning fra en hvilende ladning med massen  $m$ . Formel (9) indeholder således både et tilfælde af Doppler-effekt og et tilfælde af Compton-effekt som grænsetilfælde.

I grænsen  $hf \ll mc^2$  går ligning (9), som sagt, imod Doppler-formlen for refleksion af en elektromagnetisk bølge fra et spejl bevæget imod bølgen. Den generelle formel for bevarelsen af relativistisk energi og impuls i sammenstød imellem en foton og en elektron har altså kontinuumsfænomenet lysrefleksion i et bevæget spejl som grænsetilfælde.

Et fint eksempel på korrespondensprincippet!

### Breddeopgave 79. Klodesprængning

Inden næste nummer af KVANT udkommer, kan læserne eventuelt overveje løsningen til denne opgave fra breddekurset på RUC (fra eksamen januar 2016, nr. 79 i rækken her i KVANT):

*Hvilken indflydelse har massetætheden på, hvor hurtigt kloder kan rotere om sig selv uden at sprænges? Begrund svaret.*

Løsning og kommentar bringes i næste nummer af KVANT.

## Earthrise



Forsidebilledet på dette nummer af KVANT blev taget af astronauten Bill Anders, da han sammen med Frank Borman og Jim Lovell var i kredsløb omkring Månen ombord på Apollo 8 i juledagene for 50 år siden.

Billedet omtales også som "Earthrise", hvilket egentlig ikke er korrekt. Eftersom Månen hele tiden vender samme side mod Jorden, står Jorden kun op over Månen, hvis man er i kredsløb omkring den og således bevæger sig.

Apollo 8 blev opsendt den 21. december 1968 og det tog 68 timer at nå ud til Månen, hvor rumskibet var i kredsløb i 20 timer. Besætningen på Apollo 8 blev således de første mennesker, der gik i kredsløb omkring

et andet himmellegeme. Juleaften 1968 sendte de et direkte tv-program til Jorden, som blev set eller hørt af omkring en milliard mennesker. De viste også direkte billeder fra Månens overflade, som de havde kigget på de forudgående 16 timer, men hvis man dømmes efter deres umiddelbare kommentarer, var de nu ikke begejstrede for synet.

De beskrev overfladen med udtryk som "absolut ingen farve" og "hvidlig-grå, som en snavset sandstrand", og Frank Borman beskrev sin oplevelse af Månen som en "vidtstrakt, ensom, uindbydende eksistens", som "bestemt ikke synes at være et særligt indbydende sted at bo eller arbejde". Jim Lowell fortsatte med at fortælle, at hans indtryk af Månen var det samme: den store ensomhed deroppe fik ham i stedet til at indse, hvor meget vi har på Jorden, som set fra Månen ligner en stor oase i det enorme, tomme rum.

Måske er det også forklaringen på, at billedet af jordkloden, der stiger op fra Månens grå og livløse overflade og med det sorte verdensrum som baggrund, er blevet et af de mest ikoniske billeder fra det 20. århundrede (se fx forsidebilledet til bogen "The Rise of Science", der er anmeldt på side 31). Flere har ligefrem beskrevet oplevelsen, da de første gang så billedet, som nærmest en åbenbaring, fordi det gik op for dem, hvor sårbare og ensomme vi er i universet.

JOPP