Kroppen i naturen: Embodyment og matematikkens effektivitet i naturbeskrivelsen

Mikkel Willum Johansen, Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet

Der findes en række forskellige bud på, hvorfor matematikken kan bruges i naturbeskrivelsen. I denne artikel skal vi se nærmere på en forklaring, der tager udgangspunkt i menneskets biologi og i de kognitive teknikker, mennesket generelt bruger til at håndtere omverdenen.

En af de mest interessante gåder i den moderne matematikfilosofi er spørgsmålet om, hvorfor matematikken er så effektivt et redskab til at beskrive den fysiske verden. Effektiviteten i naturbeskrivelsen er faktisk så væsentligt et træk ved matematikken, at man kan betragte det som et designkriterie: Enhver filosofisk forståelse af, hvad matematik er, må som minimum indeholde en forklaring på, hvorfor matematikken er naturbeskrivende. Groft sagt falder de typiske forklaringer i en af tre typer:

1. Man kan hævde, at den fysiske verden i sig selv er konstrueret eller skabt efter matematiske principper. Det er fx den forklaring, man ser i Galileo Galileis berømte tanke om, at Naturens bog er skrevet i matematikkens sprog. Denne type forklaring kan kaldes platonistisk, og her forestiller man sig typisk, at matematikken på en eller anden måde eksisterer uafhængigt af og før den fysiske verden.

2. Man kan hævde, at matematik er en beskrivelse af meget generelle lovmæssigheder i den fysiske verden. Matematikken er med andre ord i udgangspunktet naturbeskrivende på samme måde som fysikken. Denne type forklaringer kan kaldes empiristiske, og her ser man matematikken som en direkte beskrivelse af træk ved den fysiske virkelighed.

3. Man kan hævde, at de matematiske strukturer, vi oplever, skyldes, at vores eget erkendeapparat former vores oplevelser på en bestemt måde. Matematikken er altså ikke noget, der (nødvendigvis) findes i verden, som den er i sig selv, men kun noget, der findes i verden, som vi oplever den. Denne type forklaringer kaldes konstruktivistiske, og her ser man matematikken som en konstruktion, der har udgangspunkt i træk ved vores særlige måde at erkende verden på. Med andre ord findes matematikken (til dels) i os selv.

Der findes selvfølgelig andre forestillinger om, hvad matematik er. Specielt har den forestilling, at matematik er logisk nødvendige sandheder, spillet en rolle, men eftersom den hverken giver et godt billede af matematikken eller forklarer, hvorfor matematik kan anvendes i naturbeskrivelsen, vil vi springe den over her.

Af de tre forklaringstyper ovenfor har diverse platonistiske forklaringer traditionelt været dominerende. I en moderne kontekst virker de dog utilfredsstillende, fordi de hviler på påstande, der er i modstrid med vores øvrige videnskabelige viden (specielt er påstanden om, at matematiske objekter findes uden for tid og rum i modstrid med grundlæggende fysik).

Empiristisk forklaring af matematikken

Det eneste gennemarbejdede forsøg på at give en empiristisk forklaring af matematikken blev fremsat af John Stuart Mill i *A System of Logic* fra 1843 [1]. Mill tager udgangspunkt i en streng empirisme, hvor matematikkens objekter direkte skal afspejle naturfænomener. Således svarer tallene til antallet af objekter i samlinger, og sætninger som "$1 + 2 = 3$" afspejler den lovmæssighed, at hvis vi tilføjer et objekt til en gruppe på to objekter, vil vi få samme sanseindtryk, som hvis vi ser en gruppe med tre objekter. Mills teori svarer godt på den del af opgaven, der går ud på at forklare, hvorfor matematikken kan beskrive naturen, men til gengæld giver den en meget ringe forklaring på, hvad matematik er. For at give et enkelt eksempel rummer universet (så vidt vi ved) et stort, men endeligt antal objekter (fx findes der ca. 10^{80} atomer). Så hvis man opfatter tal som antal, er det svært at se, hvordan man kan forklare matematikkens uendelige mængder og transfinitte tal (dvs. tal, der angiver størrelserne på det stigende hierarki af uendeligt store mængder). Tilsvarende opererer matematikken med uendelig stor præcision (i det reelle talsystem), perfekt rette linjer uden bredde osv. Med andre ord rummer matematikken en abstraktion, der ikke kan indfanges i en naiv empirisme som Mills.

Så hverken platonismen eller empirismen har indtil videre leveret gode forklaringer på matematikkens brugbarhed, og der findes stadig ikke nogen god og alment accepteret løsning på problemet. I de sidste årtier er der dog kommet en helt anden type af forklaringer på banen. Forklaringerne er konstruktivistiske og tager desuden udgangspunkt i en såkaldt naturalistisk opfattelse af matematikken, dvs. en opfattelse, der – i modsætning til navnlig platonismen – bygger på og er i overensstemmelse med vores empiriske viden i øvrigt.

Konstruktivisme

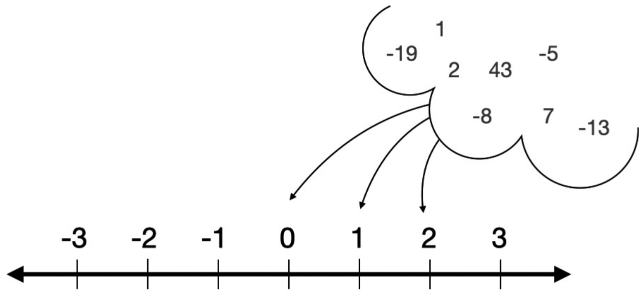
Det nok mest ambitiøse forsøg på at give en forklaring af den type blev givet af George Lakoff og Raphael Núñez i bogen *Where mathematics comes from* fra år 2000 [2]. Lakoff og Núñez tager udgangspunkt i den såkaldte kognitive semantik, hvor man i løbet af de sidste 50 år er blevet opmærksom på, at mennesker har en forbavsende evne til at blande og afbilde konceptuelle strukturer fra forskellige domæner ind i hinanden. Den slags konceptuelle afbildninger tager typisk udgangspunkt i et domæne af konkrete, kropslige erfaringer, hvis struktur så afbildes over i et mere uhåndgribeligt domæne. Fx kan vores oplevelse af at bevæge os i et fysisk rum bruges til at forstå det abstrakte fænomen tid – vi kan "nærme os eksamen", "se frem mod ferien" eller have "lagt en svær tid bag os" – og oplevelsen at lægge ting i bunker og hælde væske i beholdere giver os det grundlæggende kognitive skema "mere er op", der fx kommer til udtryk i sætninger som "inflationen stiger i Danmark" (hvor Danmark desuden konceptualiseres som en beholder og inflation som en væske). Ifølge teorien er vores abstrakte tænkning helt gennemsyret af den slags strukturer, og dermed er vores abstrakte tænkning baseret på lån fra konkrete, typisk kropslige oplevelser.

Lakoff og Núñez påpeger nu, at det samme gør sig gældende for matematikken. Det er klart, at matematikkens sprog i høj grad bygger på dagligdagserfaringer: Man "lægger til" og "trækker fra" og funktioner kan "vokse", "aftage" og "gå mod 0" (hvilket de selvfølgelig bogstaveligt talt ikke kan, da funktioner er mængder af ordnede par, der ikke kan bevæge sig ud af stedet). For Lakoff og Núñez indikerer den form for sprogbrug, at matematikken har et kropsligt fundament, og på den baggrund forsøger de at give et samlet billede af, hvordan matematikken er blevet formet med udgangspunkt i den grundlæggende aritmetik.

Aritmetikken er, hævder Lakoff og Núñez, en konstruktion, der er blevet til på baggrund af helt grundlæggende strukturer, vi har erfaret fx ved at flytte rundt på sten og andre objekter, lægge dem i bunker og splitte bunkerne op igen. Helt basalt svarer den aritmetiske operation addition til det at tilføje objekter til bunken og subtraktion til det at fjerne objekter. Men afbildningen indeholder også andre og mere grundlæggende strukturer, fx giver vores erfaring af, at det er underordnet hvilken rækkefølge, vi lægger to bunker sammen, os den kommutative lov for addition, og erfaringen af, at vi altid kan tilføje flere objekter til bunken, betyder i det aritmetiske domæne, at de naturlige tal er lukket under addition (eller med andre ord, at mængden af naturlige tal er (potentielt) uendelig).

Konstruktionen er dog ikke fuldstændig arbitrær. Fra adfærdsbiologien ved vi, at både mennesker og en lang række pattedyr og fugle har en medfødt evne til at opfatte og håndtere de aritmetiske egenskaber ved små mængder ($N < 5$ for mennesker). Fx forventer både aber og spædbørn, at hvis man gemmer to objekter bag en ugennemsigtig skærm og bagefter tilføjer nok et objekt, ja, så er der tre objekter, når man fjerner skærmen. Med andre ord har vi en medfødt fornemmelse af, at $2 + 1 = 3$ og andre meget basale aritmetiske forhold. Man skal dog være klar over, at hverken småbørn eller dyr kan matematik. Evolutionen har givet dem en evolutionært set hensigtsmæssig måde at håndtere bestemte træk ved deres miljø, men det er først med de konceptuelle afbildninger, at den medfødte fornemmelse får den abstrakte og begrebslige struktur, der er en forudsætning for egentlig matematik – og i øvrigt også er en forudsætning for at udvide den begrænsede medfødte evne til at håndtere andet end meget små mængder.

Ved hjælp af andre mere avancerede konceptuelle afbildninger som fx tallinjen, kan negative tal, brøker og det reelle talsystem, ifølge Lakoff og Núñez, trinvist konstrueres, og herefter følger konstruktionen af komplekse tal, uendelighed og i det hele taget hele den abstrakte, moderne matematik.



Figur 1. Tallinjen er et eksempel på en konceptuel afbildning, hvor to forskellige domæner sammenflettes eller *blendes*. Tallene har ikke i sig selv en geometrisk struktur, men med tallinjen giver man dem én ved at sammenflette det aritmetiske og det geometriske domæne. Tallinjen blev indført af John Wallis i 1685 som et argument for eksistensen af negative tal, og tallinjen har senere spillet en rolle i konstruktionen af det reelle talsystem, idet det er en konsekvens af blenden, at der må være netop ét tal for hvert punkt på linjen.

Hvis vi skal vurdere teorien, er det for det første klart, at den giver et fint svar på, hvorfor matematikken kan bruges i naturbeskrivelsen; matematikken er konstrueret ud fra stukturer, vi har erfaret i virkeligheden, og derfor er der egentlig ikke noget problem. Man skal dog være klar over, at der ikke er tale om en empiristisk teori, hvor matematikken er en 1:1 afspejling af virkeligheden. Matematikken tager udgangspunkt i lokalt erfarede strukturer, og netop det giver den luft, der er nødvendig, for at matematikken kan beholde sin abstrakte og idealiserede natur: Det er min lokale erfaring, at jeg altid kan lægge ét objekt mere i min bunke, og derfor konstruerer vi de naturlige tal som en uendelig stor mængde, også selv om vi godt ved, at vi i den fysiske virkelighed løber tør for objekter på et tidspunkt. Lakoff og Núñez' teori åbner derfor muligheden for, at matematikken på en gang tager udgangspunkt i vores erfaring af virkeligheden, men samtidig når frem til resultater, der på andre punkter er i modstrid med dem. Teorien er dermed *konstruktivistisk*, ikke empiristisk.

Konstruktivismen understreges af, at matematikken afspejler interesser og kropslige erfaringer, der afhænger af vi menneskers specifikke biologi og måde at være tilstede i verden på. Hvis der findes intelligente gopler, er det ikke sikkert, at de går lige så meget op i at lægge ting i bunker, som vi gør, og dermed vil de ikke have de basale kropslige erfaringer, vi bruger til at opbygge aritmetikken (men formentlig nogle helt andre). Lakoff og Núñez påpeger desuden, at konstruktionen af matematikken er ikke-deterministisk i den forstand, at vi ikke er tvunget til at konstruere den på en bestemt måde. Selv om matematikken tager udgangspunkt i almenmenneskelige erfaringer, er det ikke på forhånd givet, hvordan erfaringerne skal sættes i spil, og der er derfor plads til et element af kulturel forhandling, også i matematikken.

Betydning af eksterne repræsentationer

Der er dog også nogle alvorlige problemer i teorien. Selv om konceptuelle afbildninger utvivlsomt spiller en stor rolle i moderne matematik, og matematikere både med deres sprog, gestik og med diagrammer og andre visualiseringer indlejrer den matematiske tænkning i kropsligt erfarede strukturer, er matematik langt mere kompleks end Lakoff og Núñez giver udtryk for, og dens udvikling er formet af mange andre faktorer end konceptuelle afbildninger. Specielt overser teorien den helt afgørende betydning, eksterne repræsentationer som symboler og diagrammer spiller i matematisk tænkning. I dag opfatter matematikere simpelthen det at tænke som synonymt med det at skrive, fordi de er så afhængige af at udtrykke sig og manipulere med diagrammer og symboler. Dette er selvfølgelig også et udtryk for en kropsliggjort form for tækning (idet tænkningen foregår som et samspil mellem mentale og fysiske repræsentationer), men det er en helt anden form for kropslighed end den, Lakoff og Núñez bygger deres teori op om.

Eksterne repræsentationer har da også været en vigtig faktor i udformningen af matematikken. Komplekse tal kom således ikke til verden som et resultat af konceptuelle afbildninger, der gjorde det muligt at konstruere den komplekse plan, som Lakoff og Núñez antyder. Komplekse tal blev første gang eksplicit beskrevet i 1545, da den italienske matematiker Gerolamo Cardano i værket *Ars Magna* [3] overvejede, om han kunne finde to tal, der har produktet 40 og summen 10. Den geometrisk baserede algoritme, man i datiden brugte til at behandle den slags problemer, førte til en løsning, der involverede negative arealer, hvilket fra et geometrisk synspunkt ikke giver mening og ikke kan repræsenteres. Imidlertid kunne Cardano, ved at bruge en semi-symbolsk repræsentationsform, der var ved at opstå, udtrykke løsningerne som “$5pRm15$” og “$5mRm15$”, hvor “p” i moderne notation betyder $+$, “m” betyder $-$, og “R” betyder $\sqrt{}$ hvilket i moderne notation giver løsningerne $5+\sqrt{-15}$ og $5-\sqrt{-15}$. Løsningerne gav ingen mening for ham (han kalder dem “sofisteri”), men da de komplekse tal viste sig nyttige i løsninger af andre ligninger, gled de ind i matematikken, og først omkring 250 år senere blev den komplekse plan indført som en måde at give mening til de nye, underlige tal. Den komplekse plan var altså ikke en objektskabende, men en meningsskabende konstruktion.

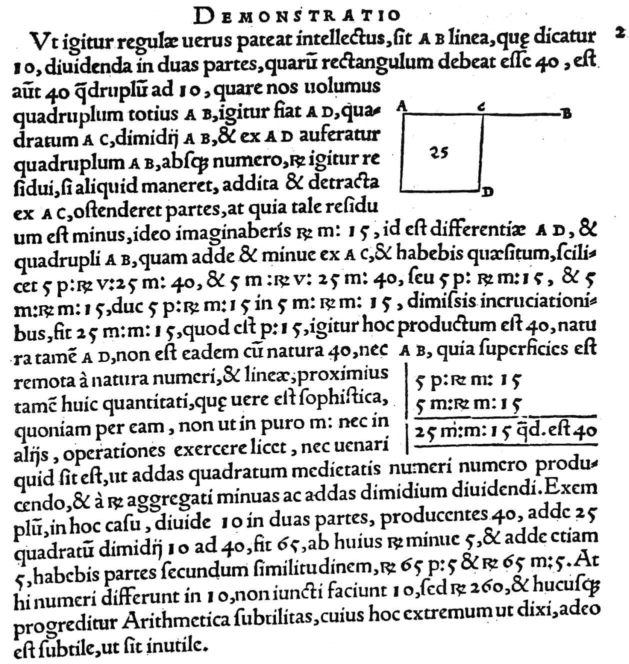
Kombinationen af abstrakte symboler og faste regneregler har ført til mange andre udvidelser af matematikken. Som et eksempel bemærkede den store 1700-talsmatematiker Leonhard Euler, at brøken $1/(1-x)$ ved simpel udregning giver den uendelige række [4]

$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

Ved at indsætte 2 på x's plads når Euler frem til identiteten:

$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$

Det er kontraintuitivt, da summen på højre side intuitivt set må være uendelig stor, men Euler accepterer ikke desto mindre resultatet. Efterfølgende matematikere havde dog ikke samme holdning, og indførte derfor restriktioner på regningen med uendelige rækker, så de (alt for) underlige resultater blev udelukket. Som sagt er matematikken ikke deterministisk, men til dels et resultat af social forhandling, og i dette tilfælde besluttede man altså, at matematikken skulle forblive i overensstemmelse med fysisk inspirerede intuitioner.


DEMONSTRATIO 2
Vt igitur regulæ uerus pateat intellectus, sit A B linea, quę dicatur 10, diuidenda in duas partes, quarū rectangulum debeat esse 40, est aūt 40 q̃druplū ad 10, quare nos uolumus quadruplum totius A B, igitur fiat A D, quadratum A C, dimidij A B, & ex A D auferatur quadruplum A B, absq; numero, ℞ igitur residui, si aliquid maneret, addita & detracta ex A C, ostenderet partes, at quia tale residuum est minus, ideo imaginaberis ℞ m: 15, id est differentiæ A D, & quadrupli A B, quam adde & minue ex A C, & habebis quæsitum, scilicet 5 p: ℞ v: 25 m: 40, & 5 m: ℞ v: 25 m: 40, seu 5 p: ℞ m: 15, & 5 m: ℞ m: 15, duc 5 p: ℞ m: 15 in 5 m: ℞ m: 15, dimissis incruciationibus, fit 25 m: m: 15, quod est p: 15, igitur hoc productum est 40, natura tamē A D, non est eadem cū natura 40, nec A B, quia superficies est remota à natura numeri, & lineæ, proximius tamē huic quantitati, quę uere est sophistica, quoniam per eam, non ut in puro m: nec in alijs, operationes exercere licet, nec uenari quid sit est, ut addas quadratum medietatis numeri numero producendo, & à ℞ aggregati minuas ac addas dimidium diuidendi. Exemplū, in hoc casu, diuide 10 in duas partes, producentes 40, adde 25 quadratū dimidij 10 ad 40, fit 65, ab huius ℞ minue 5, & adde etiam 5, habebis partes secundum similitudinem, ℞ 65 p: 5 & ℞ 65 m: 5. At hi numeri differunt in 10, non iuncti faciunt 10, sed ℞ 260, & hucusq; progreditur Arithmetica subtilitas, cuius hoc extremum ut dixi, adeo est subtile, ut sit inutile.

5 p: ℞ m: 15
5 m: ℞ m: 15
25 m: m: 15 q̃d. est 40

Figur 2. Gerolamo Cardanos gennemregning af sine komplekse løsninger.

Kontraintuitive funktioner

I andre tilfælde er kalibreringen dog gået den anden vej. I slutningen af det 19. århundrede blev det fx klart, at man inden for rammerne af den matematiske analyse kunne konstruere kontraintuitive funktioner. En af dem beskriver fx en kurve, der kan udfylde en flade. Da matematiske kurver ikke har nogen bredde, er det i modstrid med vores geometriske intuition. Den slags “monsterfunktioner” gav matematikerne valget mellem at forlade den geometriske intuition eller at foretage grundlæggende revisioner i matematikken, og igen fandt en (til tider ophedet) diskussion sted. Denne gang valgte matematikerne dog at holde fast i det formelle resultat, selvom det bragte matematikken i modstrid med den fysiske virkelighed.

Endelig har matematikken været meget direkte påvirket af fysikken. Et berømt eksempel stammer fra Isaac Newtons differentialregning fra 1671 [5], hvor Newton, for at få det resultat, han ønsker, er nødt til at dividere med en størrelse, som han senere sætter til nul. Det er mildest talt dårlig matematik (da man ville få et andet resultat, hvis man foretog operationerne i omvendt rækkefølge), men i stedet for at forkaste Newtons resultater gav eftertidens matematikere sig til at finde mere solide metoder til at bevise dem, fordi de så åbenlyst var nyttige i naturbeskrivelsen. Det lykkedes først i 1821, hvor Augustin-Louis Cauchy formulerede differentialregningens grundlag i termer af grænseovergange.

Matematik som et mangefacetteret fænomen

Eksempler som disse indikerer, at matematikken er andet og mere end en lagkage af konceptuelle afbildninger. Specielt har repræsentationer og regler for at manipulere dem været en drivende kraft i matematikkens udvikling, og det samme har samspillet med andre videnskaber, navnlig fysikken. Eksemplerne viser dog ikke, at Lakoff og Núñez' grundlæggende idé er forfejlet, kun at den er forsimplet. Hvis vi skal forstå, hvad matematik er, og hvorfor matematikken kan bruges i beskrivelsen af virkeligheden, er der god grund til at inddrage konceptuelle afbildninger, men man er også nødt til at forstå deres samspil med en lang række andre faktorer, herunder matematikeres brug af repræsentationer og de sociale forhandlinger, der ligger bag overordnede beslutninger om konstruktionen. Den grundlæggende præmis er dog frugtbar og giver en god mulighed for at forklare matematikkens anvendelighed: Matematik er en menneskelig konstruktion, der bl.a. via konceptuelle afbildninger har en klar forbindelse til strukturer, vi mennesker oplever i vores omgivelser, men den er samtidig en konstruktion, der er formet af vores ønsker og behov, herunder behov fra fysikken og ønsket om at være naturbeskrivende. Matematikken er dog også, som vi har set, formet af andre ønsker, og har specielt i det 20. århundrede været præget af en stigende grad af autonomi.

Endelig skal det tilføjes, at den naturalistisk-konstruktivistiske forklaringsramme, Lakoff og Núñez har været med til at etablere, er netop det: en ramme, som de ikke selv for alvor får fyldt ud. Det er heller ikke lykkedes andre at gøre det, og formentlig vil det aldrig ske. Matematikken er simpelthen for komplekst og mangefacetteret et fænomen til, at den kan passe ind i en simpel forklaring. Så der er stadig masser af gåder og ting at diskutere, også når det kommer til samspillet mellem matematik, fysik og den verden, vi oplever omkring os.

Litteratur

[1] J.S. Mill (1882 [1843]) A System of Logic, Ratiocinative and Inductive. 8. udg., Harper & Brothers, New York.

[2] G. Lakoff og R. Núñez (2000) Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics Into Being, Basic Books, New York.

[3] G. Cardano (2007 [1545]) The Rules of Algebra (Ars Magna). Oversat af T.R. Witmer, Dover Publications, New York.

[4] L. Euler (2000 [1755]) Foundations of Differential Calculus. Oversat af J.D. Blanton, Springer, New York.

[5] I. Newton og D.T. Whiteside (1964) The Mathematical Works of Isaac Newton, Bind 1, Johnson Reprint Corp, New York.

[6] M.W. Johansen og H.K. Sørensen (2014) Invitation til matematikkens videnskabsteori, Samfundslitteratur, Frederiksberg.

Mikkel Willum Johansen er lektor ved Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet. Hans primære forskningsområde er matematikkens videnskabsteori.

Fysisk matematik?

Mogens Esrom Larsen skrev i Kvant, årgang 18, nr. 3 (september 2007), side 26–31, en artikel om, hvordan matematikken blev fordrevet fra fysikken i nyere tid, så vi nu ser de to fag som parallelle. Matematikeren laver sine modeller, som fysikeren sammenligner med sin virkelighed, og så må den ligne eller ej! Men sådan har det ikke altid været, for fagene var engang flettet tæt sammen.
Læs eller genlæs artiklen på Kvants hjemmeside: http://kvant.dk/upload/kv-2007-3/kv-2007-3-MEL-fysmat.pdf