Ventilator – breddeopgave 101

Jens Højgaard Jensen, IMFUFA, INM, RUC.

Mit formål med artikelserien om breddeopgaver er – udover at gøre opmærksom på RUCs fysikuddannelse – dobbelt: Dels udvælger jeg opgaverne, så de kan have interesse som fysikproblemer i egen ret. Dels udvælger jeg dem med henblik på at kunne knytte didaktiske overvejelser til dem af interesse for fysikundervisere. I første omgang i forhold til universitetsundervisning. Men i anden omgang kunne der måske også trækkes paralleller til andre undervisningsniveauer.

Her bringes løsning og kommentar til opgaven fra forrige nummer samt to nye opgaver. Opgaven i sidste nummer af Kvant var denne breddeopgave (nr. 101 i rækken her i Kvant):

Breddeopgave 101. Ventilator

Hvordan afhænger effektforbruget af en ventilator med en roterende propel af dens diameter og dens rotationsfrekvens? Begrund svaret.

Løsning

Grundlæggende må ventilatorens effektforbrug, udover af propellens diameter d og dens rotationsfrekvens ν, afhænge af luftens egenskaber, og af, hvordan ventilatoren er udformet. De relevante egenskaber af luften i sammenhængen er luftens massefylde ρ og dens viskositet η. Da ventilatorens form kan beskrives ved en række dimensionsløse vinkler og længdeforhold, vil en formel for effektforbruget P skulle søges blandt:

$$P = f(\mathrm{form})\rho^{\alpha} d^{\beta} \nu^{\gamma} \eta^{\delta}, \tag{1}$$

hvor $f(\mathrm{form})$ er en ukendt dimensionsløs funktion af en række dimensionsløse variable, og eksponenterne α, β, γ og δ skal vælges, så der er samme dimension på begge sider af lighedstegnet.

En rimelig antagelse er, at ventilatorens effekt først og fremmest afsættes som makroskopisk bevægelse af luften, og kun i mindre grad som opvarmning af luften. Det betyder, at det er ρ fremfor η, der har betydning som luftegenskab. Vi indskrænker os derfor til at kræve, at α, β og γ skal vælges, således at dimensionen af P, $\mathrm{ML^2T^{-3}}$, er lig med dimensionen af $\rho^{\alpha} d^{\beta} \nu^{\gamma}$, $\mathrm{M^{\alpha}L^{\beta-3\alpha}}$ $\mathrm{T^{-\gamma}}$. Da basisdimensionerne: masse M, længde L og tid T, per definition ikke kan afledes fra hinanden, skal der være overensstemmelse mellem potenserne for hver basisdimension for sig.

Det ses umiddelbart, at ens potens af tidsdimensionen på begge sider af lighedstegnet forudsætter $\gamma = 3$. Tilsvarende forudsætter ens potens af massedimensionen på begge sider af lighedstegnet $\alpha = 1$. Hvilket, som følge af kravet om ens potens af længdedimensionen, medfører $\beta = 5$. Af dimensionsgrunde er formlen for P altså tvunget til at have formen:

$$P = f(\text{form})\rho d^5 \nu^3. \tag{2}$$

Svaret på opgaven er derfor, at effektforbruget for en given ventilator vil variere med rotationsfrekvensen i tredje potens. Og at effektforbruget for ligedannede ventilatorer varierer med deres lineære udstrækning i femte potens.

Kommentar

I en dårlig ventilator kan effektforbruget, udover at sætte luft i bevægelse, også tænkes at varme luften op. Da det er luftens viskositet, der er den egenskab ved luften der er bestemmende for opvarmningen, må vi så geninddrage η i dimensionsanalysen. Det må vi også, hvis overførslen af propellens bevægelse til luften via et grænselag afhænger af størrelsen af η, og ikke blot af, at η er stor nok til, at det alene er propelgeometrien, der bestemmer luftbevægelsen. Ifølge ligning (1) er det da dimensionen af P, $\mathrm{ML^2T^{-3}}$, og dimensionen af $\rho^\alpha d^\beta \nu^\gamma \eta^\delta$, $\mathrm{M^\alpha L^{-3\alpha}\, L^\beta T^{-\gamma}\, M^\delta L^{-\delta}\, T^{-\delta}}$, der skal være ens. For de tre basisdimensioner betyder det:

$$\begin{aligned} M:1 &= \alpha + \delta \\ L:2 &= -3\alpha + \beta - \delta \\ T:-3 &= -\gamma - \delta \end{aligned} \tag{3}$$

Tre ligninger med fire ubekendte, som ikke har nogen entydig løsning. Men ligningerne kan dog bruges til at finde $\alpha = 1-\delta, \beta = 2+3\alpha+\delta = 5-2\delta$, og $\gamma = 3-\delta$. Indsættes det i ligning (1) fås:

$$P = f_1(\text{form})\rho d^5\nu^3 \left(\frac{\eta}{\rho d^2 \nu}\right)^\delta. \tag{4}$$

Formlen er langt fra entydig, da den gælder for alle værdier af δ. Tværtimod kan vi omformulere den til:

$$P = f_2(\text{form}, \frac{\eta}{\rho d^2\nu})\rho d^5\nu^3, \tag{5}$$

hvor f_2, udover af de dimensionsløse vinkler og størrelsesforhold, der fastlægger ventilatorens form, er en ukendt funktion af den dimensionsløse størrelse $\eta/(\rho d^2\nu)$. Størrelsen er nødvendigvis dimensionsløs, da den er udledt fra kravet om ens dimensioner på begge sider af lighedstegnet, uafhængigt af værdien af δ. Sammenhængen mellem ligning (4) og ligning (5) er, at ligning (5) repræsenterer alle de linearkombinationer, der kan dannes fra ligning (4) med varierende værdier af δ.

Selvom dimensionsanalysen, når η inddrages i overvejelserne, ikke entydigt fastlægger P's afhængigheder af ρ, d og ν, som formel (2) gør det, så reducerer den i kraft af formel (5) kortlægningen af P's afhængigheder af ρ, d, ν og η til måling af f_2's afhængighed, for en given form, af kun den ene variabel $\eta/(\rho d^2\nu)$. Dette er i analogi til beskrivelsen af mange hydrodynamiske problemers afhængighed af Reynolds tal.

Udtrykket $\eta/(\rho d^2\nu)$ er – for værdier meget mindre end 1 – størrelsesordensmæssigt den andel af P, der omsættes til varme. Med $\eta/\rho = 0,15\ \mathrm{cm^2/s}$ for luft ved stuetemperatur, $d = 10\,\mathrm{cm}$ og $\nu = 10\,\mathrm{s^{-1}}$ giver det 10^{-4} for størrelsesordenen af varmeandelen. Vi behøver nok ikke formel (5) ved vurdering af ventilatorer. Formel (2) rækker til formålet. Men måske er formel (5) af betydning for røremaskiner?

Boks 1. Det formelle værktøj til fysisk problemløsning ved hjælp af dimensionsanalyse

En ukendt, ønsket formel for en fysisk størrelse Q_1 som funktion af andre bestemmende fysiske størrelser $Q_2, Q_3, Q_4, \ldots$ er af dimensionsgrunde begrænset til at have formen:
$Q_1 = f \cdot Q_2^\alpha Q_3^\beta Q_4^\gamma \ldots,$
hvor potenserne $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ sikrer den rigtige dimension af Q_1, og hvor f enten er:
et tal
eller
en dimensionsløs funktion af dimensionsløse størrelser blandt $Q_2, Q_3, Q_4, \ldots$,
eller/og
dimensionsløse produkter af potenser af $Q_2, Q_3, Q_4, \ldots$.

I almindelighed illustrerer udledningen af formel (5) min foretrukne måde at formidle den formelle side af dimensionsanalyse, jævnfør boks 1.

I formel (5) er α, β og γ fundet til at være henholdsvis 1, 5, og 3, og f_2 fundet til både at være en funktion af de dimensionsløse vinkler og størrelsesforhold, der bestemmer formen, og en funktion af det dimensionsløse produkt af potensfunktioner $\eta/(\rho d^2\nu)$. Ved samtidigt at dividere f_2 og gange $\rho d^5\nu^3$ med den dimensionsløse størrelse $\eta/(\rho d^2\nu)$ i ligning (5) fremkommer formlen:

$$P = f_3(\text{form}, \frac{\eta}{\rho d^2\nu})\eta d^3\nu^2. \tag{6}$$

Her er f_3, indtil den bliver målt, en ukendt funktion, ligesom f_2 er det. Formel (5) og formel (6) er dimensionsmæssigt lige gyldige. Men formel (6) er nok mere relevant for røremaskiner end for ventilatorer. Hvis røremaskinen skaber en stationær laminar strømning, går effekten P alene til gnidningsvarme, bestemt af η. P er dermed uafhængig af ρ, da der ikke skabes øget makroskopisk bevægelsesenergi. $P = f_4(\text{form})\eta d^3\nu^2$ er da den relevante formel til kortlægning af effektforbruget.

I litteraturen om dimensionsanalyse skelnes der mellem Rayleighs metode og Buckinghams metode. Rayleighs metode anvendes typisk i overskuelige tilfælde, hvor f forventes blot at være et tal. Det er så alene potenserne $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ i produktet af potensfunktioner repræsenterende $Q_1(Q_2, Q_3, Q_4 \ldots)$, der efterspørges. Ved Buckinghams metode er udgangspunktet dimensionsløse produkter af potensfunktioner af $Q_2, Q_3, Q_4 \ldots$ og Q_1. Grundlæggende er der ingen forskel. Der er mere tale om smag og behag. Fremgangsmåden, som boks 1 lægger op til, er en sammenfattende blanding af de to "metoder". Den er udtømmende og efter min mening inviterende i forhold til netop fysisk problemløsning: Hvordan afhænger Q_1 af $Q_2, Q_3, Q_4 \ldots$?

Breddeopgave 102 og 103. Modstand

Inden næste nummer af Kvant udkommer, kan læserne overveje løsningerne til disse to opgaver fra breddekurset på RUC (fra eksamen juni 2000 og eksamen juni 2008, nr. 102 og 103 i rækken her i Kvant):

Hvad er modstanden for en elektrisk strøm fra indersiden til ydersiden af en hul metalkugle? Begrund svaret.

Hvad er modstanden for en varmestrøm fra indersiden til ydersiden af en hul kugle? Begrund svaret.

Løsninger og kommentar bringes i næste nummer af Kvant.

Litteratur

[1] J.H. Jensen og T. Hecksher (2018) "Fysikernes hemmelige våben", *Aktuel Naturvidenskab*, nr. 4, side 26–29.

NYT FRA KVANT
– nyt temanummer og nye redaktionsmedlemmer

Nyt temanummer

Glæd dig til næste nummer af Kvant, hvor vi sætter fokus på udforskningen af solsystemet med bidrag fra en række danske forskere.

Nye redaktionsmedlemmer

Kvants redaktion er blevet udvidet med to nye medlemmer, og vi siger velkommen til Lars Occhionero, der er formand for Astronomisk Selskab, samt Maren Malling, der er forperson for Kvinder i Fysik samt medlem af Dansk Fysisk Selskabs bestyrelse.